QA
315
S77
v.2
MATH

OSTWALD'S KLASSIKER
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN.
Nr. 47.

ABHANDLUNGEN
ÜBER
VARIATIONS-RECHNUNG.

ZWEITER THEIL:

ABHANDLUNGEN
VON
LAGRANGE, LEGENDRE
(1762, 1770) (1786)
UND
JACOBI
(1837).

WILHELM ENGELMANN IN LEIPZIG.

517.5
S774

Ankündigung.

Der grossartige Aufschwung, welchen die Naturwissenschaften in unserer Zeit erfahren haben, ist, wie allgemein anerkannt wird, nicht zum kleinsten Masse durch die Ausbildung und Verbreitung der Unterrichtsmittel, der Experimentalvorlesungen, Laboratorien u. s. w., bedingt. Während aber durch die vorhandenen Einrichtungen zwar die Kenntniss des gegenwärtigen Inhaltes der Wissenschaft auf das erfolgreichste vermittelt wird, haben hochstehende und weitblickende Männer wiederholt auf einen Mangel hinweisen müssen, welcher der gegenwärtigen wissenschaftlichen Ausbildung jüngerer Kräfte nur zu oft anhaftet. Es ist dies das Fehlen des historischen Sinnes und der Mangel an Kenntniss jener grossen Arbeiten, auf welchen das Gebäude der Wissenschaft ruht.

Diesem Mangel soll durch die Herausgabe der Klassiker der exakten Wissenschaften abgeholfen werden. In handlicher Form und zu billigem Preise sollen die grundlegenden Abhandlungen der gesammten exakten Wissenschaften den Kreisen der Lehrenden und Lernenden zugänglich gemacht werden. Es soll dadurch ein Unterrichtsmittel beschafft werden, welches das Eindringen in die Wissenschaft gleichzeitig belebt und vertieft. Dasselbe ist aber auch ein Forschungsmittel von grosser Bedeutung. Denn in jenen grundlegenden Schriften ruhten nicht nur die Keime, welche inzwischen sich entwickelt und Früchte getragen haben, sondern es ruhen in ihnen noch zahllose andere Keime, die noch der Entwicklung harren, und dem in der Wissenschaft Arbeitenden und Forschenden bilden jene Schriften eine unerschöpfliche Fundgrube von Anregungen und fördernden Gedanken.

Die Klassiker der exakten Wissenschaften sollen ihrem Namen gemäss die rationellen Naturwissenschaften, von der Mathematik bis zur Physiologie umfassen und werden Abhandlungen aus den Gebieten der Mathematik, Astronomie, Physik, Chemie (einschliesslich Krystallkunde) und Physiologie enthalten.

Die allgemeine Redaktion führt von jetzt ab Professor emer. Dr. Arthur von Oettingen, Privatdocent an der Universität

Fortsetzung auf der dritten Seite des Umschlages.

Abhandlungen

über

VARIATIONS-RECHNUNG.

Zweiter Theil:

Abhandlungen

von

LAGRANGE (1762, 1770), LEGENDRE (1786)

und

JACOBI (1837).

Herausgegeben

von

P. Stäckel.

Mit 12 Textfiguren.

LEIPZIG
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN
1894.

LELAND STANFORD JUNIOR
LIBRARY
UNIVERSITY.

A. 16887.

Versuch einer neuen Methode um die Maxima und Minima unbestimmter Integralformeln zu bestimmen.

Von

Lagrange.

Aus den Miscellanea Taurinensia, T. II. S. 173—195 (1762).

Man braucht nur wenig in die Principien der Differentialrechnung eingedrungen zu sein nnd man kennt die Methode die grössten und die kleinsten Ordinaten von Curven zu bestimmen. Aber es giebt Aufgaben der Maxima oder Minima einer höhern Art, welche zwar von derselben Methode abhängen, sich dieser jedoch nicht leicht unterwerfen lassen. Es sind diejenigen, wo es sich darum handelt die Curven selbst zu finden, in welchen ein gegebener Integralansdruck in Bezug anf alle Curven ein Maximum oder ein Minimum ist.

Das erste Problem dieser Art, welches die Geometer gelöst haben, ist das der Brachistochrone oder der Linie des schnellsten Falles, welches *Johann Bernoulli* gegen Ende des vorigen Jahrhunderts vorlegte. Man gelangte dazu nur auf besonderen Wegen, und erst einige Zeit später und bei Gelegenheit der Untersuchungen über die isoperimetrischen Probleme gaben der grosse Geometer, von dem wir soeben sprachen, und sein ansgezeichneter Bruder *Jacob Bernoulli* einige allgemeine Regeln, um mehrere andere Anfgaben dieser Art zu lösen. Da aber diese Regeln nicht genügende Allgemeinheit hatten, unternahm es der berühmte *Euler* alle Untersuchungen dieser Art anf eine allgemeine Methode zurückznführen in dem Werke, welches betitelt ist: Methodus

invenicndi lineas curvas maximi minimive proprietate gandentes: sive solutio Problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti, einem Originalwerke, welches überall eine tiefe Kenntniss des Calculs zeigt. Indess, wie scharfsinnig und fruchtbar seine Methode auch ist, muss man doch eingestehen, dass sie nicht die genügende Einfachheit hat, welche man bei einem Gegenstande der reinen Analysis wünscht. Der Autor lässt es selbst im Artikel 39 des II. Kapitels seines Buches merken durch die Worte: Man vermisst daher eine Methode, welche unabhängig von der geometrischen Lösung ist, und welche erkennen lässt, dass bei einer solchen Ermittelung eines Maximums oder Minimums an Stelle von Pdp geschrieben werden darf $-pdP$.[1])

Hier findet man nun eine Methode, welche nur einen sehr einfachen Gebrauch von den Principien der Differential- und Integralrechnung verlangt; vor allem aber muss ich darauf aufmerksam machen, dass ich, da diese Methode verlangt, dass dieselben Grössen auf zwei verschiedene Arten variiren, um diese Variationen nicht zu verwechseln in meinen Rechnungen eine neue Charakteristik δ eingeführt habe. So soll δZ ein Differential von Z ausdrücken, welches nicht dasselbe wie dZ ist, welches aber doch nach denselben Regeln gebildet wird, sodass man, wenn irgend eine Gleichung $dZ = mdx$ besteht, ebenso $\delta Z = m\delta x$ hat, und dasselbe gilt von anderen Gleichungen.

Nachdem dies festgestellt ist, komme ich zuerst zu folgendem Problem.

I.

Problem I: Ist eine unbestimmte Integralformel, dargestellt durch $\int Z$, vorgelegt, wo Z irgend eine bestimmte Function der Variabeln x, y, z und ihrer Differentiale dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, ... bezeichnet, so soll man die Relation finden, welche diese Variabeln unter sich haben müssen, damit die Formel $\int Z$ ein Maximum oder ein Minimum wird.

Lösnng: Nach der bekannten Methode der Maxima und Minima muss man das vorgelegte $\int Z$ differentiiren, indem man die Grössen x, y, z, dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, ... als Variable ansieht, und das Differential, welches daraus hervorgeht,

gleich Null setzen. Bezeichnet man diese Variation mit δ, so hat man zuerst als Gleichung des Maximums oder Minimums:

$$\delta \int Z = 0,$$

oder, was diesem aequivalent ist,

$$\int \delta Z = 0.$$

Ist nun Z so beschaffen, dass:

$$\begin{aligned} \delta Z = {} & n\delta x + p\delta dx + q\delta d^2x + r\delta d^3x + \cdots \\ & + N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2y + R\delta d^3y + \cdots \\ & + \nu\delta z + \varpi\delta dz + \chi\delta d^2z + \varrho\delta d^3z + \cdots, \end{aligned}$$

so wird daraus die Gleichung hervorgehen:

$$\begin{aligned} & \int n\delta x + \int p\delta dx + \int q\delta d^2x + \int r\delta d^3x + \cdots \\ & + \int N\delta y + \int P\delta dy + \int Q\delta d^2y + \int R\delta d^3y + \cdots \\ & + \int \nu\delta z + \int \varpi\delta dz + \int \chi\delta d^2z + \int \varrho\delta d^3z + \cdots = 0; \end{aligned}$$

aber man begreift leicht, dass:

$$\delta dx = d\delta x, \qquad \delta d^2x = d^2\delta x$$

ist und so weiter. Nun findet man durch die Methode der theilweisen Integration:

$$\begin{aligned} & \int p\, d\delta x = p\,\delta x - \int dp\delta x, \\ & \int q d^2\delta x = q d\delta x - dq\delta x + \int d^2q\delta x, \\ & \int r d^3\delta x = r d^2\delta x - dr d\delta x + d^2r\delta x - \int d^3r\delta x, \end{aligned}$$

und so fort; daher geht die obige Gleichung über in diese:

$$\text{A)} \quad \left\{ \begin{aligned} & \int (n - dp + d^2q - d^3r + \cdots)\delta x \\ & + \int (N - dP + d^2Q - d^3r + \cdots)\delta y \\ & + \int (\nu - d\varpi + d^2\chi - d^3\varrho + \cdots)\delta z \\ & + (p - dq + d^2r - \cdots)\delta x + (q - dr + \cdots)\, d\delta x \\ & \qquad + (r - \cdots) d^2\delta x + \cdots \\ & + (P - dQ + d^2R - \cdots)\delta y + (Q - dR + \cdots)\, d\delta y \\ & \qquad + (R - \cdots) d^2\delta y + \cdots \\ & + (\varpi - d\chi + d^2\varrho - \cdots)\delta z + (\chi - d\varrho + \cdots)\, d\delta z \\ & \qquad + (\varrho - \cdots) d^2\delta z + \cdots = 0. \end{aligned} \right.$$

Aus ihr erhält man zuerst die unbestimmte Gleichung:

$$\text{B)}\begin{cases} (n - dp + d^2q - d^3r + \cdots)\,\delta x \\ +(N - dP + d^2Q - d^3R + \cdots)\,\delta y \\ +(\nu - d\varpi + d^2\chi - d^3\varrho + \cdots)\,\delta z = 0, \end{cases}$$

und ferner die bestimmte Gleichung:

$$\text{C)}\begin{cases} (p - dq + d^2r - \cdots)\delta x + (q - dr + \cdots)\,d\delta x \\ \qquad\qquad + (r - \cdots)\,d^2\delta x + \cdots \\ +(P - dQ + d^2R - \cdots)\delta y + (Q - dR + \cdots)\,d\delta y \\ \qquad\qquad + (R - \cdots)\,d^2\delta y + \cdots \\ +(\varpi - d\chi + d^2\varrho - \cdots)\delta z + (\chi - d\varrho + \cdots)\,d\delta z \\ \qquad\qquad + (\varrho - \cdots)\,d^2\delta z + \cdots = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichnng bezieht sich auf den letzten Punkt des Integrals $\int Z$, aber man muss beachten, dass man, da jedes ihrer Glieder wie $p\delta x$ von einer partiellen Integration der Formel $\int p\,d\delta x$ abhängt, dem Integral eine constante Grösse hinzufügen oder wegstreichen kann. Nun ist die Bedingung, durch welche diese Constante zu bestimmen ist, die, dass sie das Glied $p\,\delta x$ au dem Punkte, wo das Integral $\int p\,d\delta x$ anfängt, verschwinden lässt; man muss also von $p\,\delta x$ seinen Werth in diesem Punkte abziehen. Hierans geht folgende Regel hervor. Es werde das erste Glied der Gleichung C) allgemein durch M ausgedrückt, und der Werth von M in dem Punkte, wo das Integral $\int Z$ anfängt, mit $'M$, und wo das Integral anfhört, mit M' bezeichnet, dann wird man $M' - 'M = 0$ als vollständigen Ausdruck der Gleichung C) haben.

Jetzt hat man, um sich in den gefundenen Gleichungen von den unbestimmten Differentialen δx, δy, ... zu befreien, znerst zu prüfen, ob der Natnr des Problems nach zwischen ihnen irgend eine gegebene Bezichung besteht, und wenn man sie auf die kleinste Zahl zurückgefülirt hat, wird man den Coëfficienten von jeder der übrig bleibenden gleich Null machen. Wenn sie vollständig unabhängig von einander sind, wird uns die Gleichung B) sofort die drei folgenden geben:

$$\begin{aligned} n - dp + d^2q - d^3r + \cdots &= 0, \\ N - dP + d^2Q - d^3R + \cdots &= 0, \\ \nu - d\varpi + d^2\chi - d^3\varrho + \cdots &= 0. \end{aligned}$$

II.

Beispiel: Man sucht die Brachistochrone im leeren Raume.

Wenn man x die verticale Abscisse nennt und y und z die beiden Ordinaten, welche horizontal und senkrecht zu einander sind, so ist die Formel, welche die Zeit ausdrückt:

$$\int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{x}};$$

wenn man sie mit $\int Z$ vergleicht, erhält man:

$$Z = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{x}},$$

und wenn man nach δ differentiirt, nach den gewöhnlichen Regeln der Differentiation:

$$\delta Z = -\frac{\delta x \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{2x\sqrt{x}} + \frac{dx\,\delta dx}{\sqrt{x}\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} + \frac{dy\,\delta dy}{\sqrt{x}\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} + \frac{dz\,\delta dz}{\sqrt{x}\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}.$$

Setzt man daher zur Abkürzung:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

so hat man:

$$n = -\frac{ds}{2x\sqrt{x}},\quad p = \frac{dx}{\sqrt{x}\,ds},\quad P = \frac{dy}{\sqrt{x}\,ds},\quad \varpi = \frac{dz}{\sqrt{x}\,ds},$$

und alle anderen Grössen q, r, N, Q, ... sind gleich Null.

III.

Erster Fall: Wenn nun das Problem lautet, allgemein unter allen möglichen Curven die des schnellsten Falles zu finden, so hat man die Gleichungen:

$$n - dp = 0, \qquad -dP = 0, \qquad -d\varpi = 0,$$

nämlich:

$$-\frac{ds}{2x\,dx} - d\frac{dx}{\sqrt{x}\,ds} = 0,\quad -d\frac{dy}{\sqrt{x}\,ds} = 0,\quad -d\frac{dz}{\sqrt{x}\,ds} = 0;$$

da diese drei Gleichungen eine einzige Curve darstellen sollen, müssen sie sich auf nur zwei reduciren: man vergewissert sich davon leicht durch die Rechnung, denn wenn die zweite mit $2\frac{dy}{\sqrt{x}\,ds}$ multiplicirt und zur dritten, mit $2\frac{dz}{\sqrt{x}\,ds}$ multiplicirten, hinzugefügt wird, so ergiebt sich in Folge von $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$:

$$d\left(\frac{1}{x} - \frac{dx^2}{x\,ds^2}\right) = 0,$$

mithin, wenn differentiirt und das Ganze durch $2\frac{dx}{\sqrt{x}\,ds}$ dividirt wird:

$$\frac{-\,ds}{2x\sqrt{x}} - d\frac{dx}{\sqrt{x}\,ds} = 0,$$

und das ist die erste Gleichung.

Wenn man nunmehr die beiden Gleichungen:

$$d\frac{dy}{\sqrt{x}\,ds} = 0, \quad d\frac{dz}{\sqrt{x}\,ds} = 0$$

integrirt, erhält man:

$$\frac{dy}{\sqrt{x}\,ds} = \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad \frac{dz}{\sqrt{x}\,ds} = \frac{1}{\sqrt{b}},$$

woraus man zuerst:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$$

folgert, was zeigt, dass die gesuchte Curve ganz in einer und derselben verticalen Ebene liegt, und dass sie folglich von einfacher Krümmung ist. Beziehen wir sie, um sie besser kennen zu lernen, auf zwei Coordinaten in ihrer Ebene selbst. Wenn x die eine und t die andere ist, erhält man:

$$\sqrt{y^2 + z^2} = t,$$

und da $\frac{dy}{dz} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$, hat man, wenn man integrirt ohne eine Constante hinzuzufügen (weil ich annehme, dass die x-Axe durch die Curve selbst geht)

$$z = y\,\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}};$$

woraus man schliesst:

$$z = t\,\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}},\quad y = t\,\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}},\quad dy = dt\,\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}},\quad ds = \sqrt{dx^2+dt^2},$$

und endlich:

$$\frac{dy}{\sqrt{x}\,ds} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}\,\sqrt{x}}\;\frac{dt}{\sqrt{dx^2+dt^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Das aber ergiebt, wenn man $\frac{a\,b}{a+b} = c$ setzt,

$$dt = \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{c-x}},$$

die Gleichung einer Cycloide, welche auf einer horizontalen Basis von einem Kreise beschrieben wird, dessen Durchmesser gleich c ist.

IV.

Wenn nun der erste und der letzte Punkt der Brachistochrone gegeben sind, ist es klar, dass, da die Coordinaten x, y, z für diese Punkte unveränderlich sind, ihre Differentiale δx, δy, δz, $d\delta x$, $d\delta y$, ... gleich Null sein werden, und folglich auch alle Glieder der Gleichung B); die Constante c muss daher so bestimmt werden, dass die Cycloide durch die beiden gegebenen Punkte geht.

Wenn der erste Punkt gegeben ist, und die Brachistochrone so beschaffen sein soll, dass ein Körper, von diesem Punkte ausgehend, in kürzester Zeit auf eine horizontale Ebene kommt, dann ist M von selbst gleich Null, und die Gleichung B) giebt $M' = 0$, nämlich:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}\,ds}\,\delta x + \frac{dy}{\sqrt{x}\,ds}\,\delta y + \frac{dz}{\sqrt{x}\,ds}\,\delta z = 0,$$

eine Gleichung, welche nur in dem Punkte stattfinden muss, wo die Curve die Ebene trifft; da nun diese Ebene der Lage nach gegeben war, so ist die Abscisse x, welche ihr entspricht, auch gegeben, folglich erhält man $\delta x = 0$, und der

Rest der Gleichung muss richtig sein, wie auch δy und δz angenommen werden. Man hat daher:

$$\frac{dy}{\sqrt{x}\,ds} = 0, \quad \frac{dz}{\sqrt{x}\,ds} = 0, \quad a = \infty, \quad b = \infty,$$

was die Cycloide in eine verticale Gerade verwandelt. Aber wenn die gegebene Ebene, statt horizontal zu sein, vertical und senkrecht auf der Axe der y oder z wäre, dann würde man $\delta y = 0$ und folglich:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}\,ds} = 0, \quad \frac{dy}{\sqrt{x}\,ds} = 0$$

für den ersten Fall haben, ebenso $\delta z = 0$ nnd folglich:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}\,ds} = 0, \quad \frac{dy}{\sqrt{x}\,ds} = 0$$

für den zweiten; dadurch würde man die Constanten a und b bestimmen und finden, dass die Cycloide so beschaffen sein müsste, dass sie die gegebene Ebene unter rechtem Winkel träfe.

Wenn man ganz allgemein an Stelle der Ebene irgend eine Oberfläche als Endpunkt der Brachistochrone annimmt, so ist es klar, dass δx, δy, δz in der Gleichung B) unter sich eine Beziehung haben müssen, welche von der Natur der Oberfläche abhängt, sodass man,

$$dz = T dx + U dy$$

als Differentialgleichung dieser Oberfläche angesehen, erhält:

$$\delta z = T\delta x + U\delta y;$$

wenn man also diesen Werth in der Gleichung B) substituirt, so hat man:

$$\left(\frac{dx}{\sqrt{x}\,ds} + T\,\frac{dz}{\sqrt{x}\,ds}\right)\delta x + \left(\frac{dy}{\sqrt{x}\,ds} + U\,\frac{dz}{\sqrt{x}\,ds}\right)\delta y = 0;$$

man erhält hieraus für sich:

$$dx + T dz = 0, \qquad dy + U dz = 0,$$

Gleichungen, welche erkennen lassen, dass die vorgelegte Oberfläche immer unter rechtem Winkel von der gesuchten Curve geschnitten werden muss.

Wenn die Brachistochrone einfach durch zwei der Lage nach gegebene Oberflächen begrenzt werden soll, so ist es, um der Gleichung C) zu genügen, nöthig einzeln $'M = 0$ und $M' = 0$ zu setzen, woraus man für den ersten und den letzten Punkt der Curve die Bedingungen folgert, welche man im vorigen Falle nur für den letzten Punkt gefunden hatte; man wird daraus schliessen, dass die gesuchte Curve unter allen möglichen Cycloiden diejenige ist, welche die beiden vorgelegten Oberflächen senkrecht trifft. [2])

V.

Zweiter Fall: Nehmen wir jetzt an, dass die Brachistochrone ganz auf einer gegebenen Oberfläche liegen soll, deren Gleichung:

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

ist; wenn man die Charakteristik d in δ verwandelt, erhält man also:

$$\delta z = p\,\delta x + q\,\delta y,$$

eine Gleichung, welche die Beziehung giebt, die allgemein zwischen den Differentialen δz, δy, δx statthaben muss. Substituirt man diesen Werth von δz in der Gleichung B) und macht dann jeden der beiden Coëfficienten von δx und δy gleich Null, dann erhält man für die gesuchte Curve:

$$-p\,d\frac{dz}{\sqrt{x}\,ds} - \frac{ds}{\sqrt{x}\,2x} - d\frac{dx}{\sqrt{x}\,ds} = 0$$

$$-q\,d\frac{dz}{\sqrt{x}\,ds} - d\frac{dy}{\sqrt{x}\,ds} = 0.$$

Diese Gleichungen sind identisch, wenn sie mit der Gleichung der Oberfläche $dz = p\,dx + q\,dy$ verbunden werden, denn, wenn man die erste mit $\frac{2\,dx}{\sqrt{x}\,ds}$ und die zweite mit $\frac{2\,dy}{\sqrt{x}\,ds}$ multiplicirt und sie vereinigt, findet man nach gehöriger Reduction:

$$-d\frac{1}{x} - \frac{dx}{x^2} = 0.$$

Man wird daher eine dieser Gleichungen willkürlich annehmen und sie mit der Gleichung $dx = p\,dx + q\,dy$ verbinden, um die gesuchte Brachistochrone zu erhalten.

VI.

In Betreff der Gleichung B) ist es klar, dass alle Glieder derselben verschwinden, wenn man den ersten und den letzten Punkt der Curve als gegeben annimmt; aber wenn einer von beiden willkürlich wäre, dann hätte man, nachdem man an Stelle von δz seinen Werth $p\delta x + q\delta y$ substituirt hat, die Gleichungen:

$$p\,\frac{dz}{\sqrt{x}\,ds} + \frac{dx}{\sqrt{x}\,ds} = 0 \quad \text{und} \quad q\,\frac{dz}{\sqrt{x}\,ds} + \frac{dy}{\sqrt{x}\,ds} = 0,$$

welche man in Bezug auf diesen Punkt zu erfüllen suchen muss. Wenn man aber auf die Oberfläche eine Curve gezeichnet hätte, zu welcher der bewegliche Körper in kürzester Zeit kommen soll, und diese gegebene Curve durch die Gleichung bestimmt:

$$dy = m\,dx,$$

so hätte man ebenfalls:

$$\delta y = m\,\delta x;$$

und wenn dieser Werth von δy in der Gleichung B) substituirt wäre, würde man setzen:

$$p\,\frac{dz}{\sqrt{x}\,ds} + \frac{dx}{\sqrt{x}\,ds} + \left(q\,\frac{dz}{\sqrt{x}\,ds} + \frac{dy}{\sqrt{x}\,ds}\right) m = 0,$$

oder:

$$(p + qm)\,dz + dx + m\,dy = 0,$$

eine Gleichung, welche die nöthigen Bedingungen enthält, damit die Brachistochrone die vorgelegte Curve unter rechtem Winkel trifft.

VII.

Bemerkung I. *Euler* hat zuerst allgemeine Formeln gegeben, um die Curven zu finden, in welchen eine gegebene Integralfunction den grössten oder kleinsten Werth hat (siehe

das Werk, welches weiter oben, S. 3, erwähnt wurde); aber die Formeln dieses Autors sind weniger allgemein als die unsrigen: 1. weil er nur die eine Veränderliche y im Ausdruck Z variiren lässt; 2. weil er annimmt, dass der erste und der letzte Punkt der Curve fest sind. Wenn man diese Bedingungen in unsere Formeln aufnimmt, so werden sie denen der Anfgabe V des citirten Werkes ganz gleich; man muss nur Zdx an Stelle von Z setzen und dann $\frac{P}{dx}, \frac{Q}{dx}, \ldots$ an Stelle von $P, Q, \ldots$, da dx constant ist.

VIII.

Bemerkung II. Es werde angenommen:

$$dy = Adx, \quad dA = Bdx, \ldots, \quad dz = \alpha dx, \quad d\alpha = \beta dx, \ldots.$$

Dann ist klar, dass der Ausdruck Z, wenn man diese Werthe substituirt, die Form Xdx annimmt, wo X irgend eine algebraische Function der endlichen Variabeln:

$$x, \; y, \; z, \; A, \; B, \ldots, \; \alpha, \; \beta, \ldots.$$

ist; setzen wir also:

$$\delta X = N'\delta x + n'\delta y + \nu'\delta z + P'\delta A + Q'\delta B + \cdots + \varpi'\delta\alpha + \chi'\delta\beta + \cdots,$$

so erhält man:

$$\delta Z = \delta \cdot X dx = \delta X dx + X\delta dx = \delta X dx + \frac{Z\delta dx}{dx}$$
$$= N'dx\delta x + \frac{Z\delta dx}{dx} + n'dx\delta y + \nu'dx\delta z + P'dx\delta A + Q'dx\delta B + \cdots + \varpi'dx\delta\alpha + \chi'dx\delta\beta + \cdots,$$

nun ist:

$$dy = Adx$$
$$d^2y = Bdx^2 + Ad^2x$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

also:

$$\delta dy = \delta Adx + A\delta dx,$$
$$\delta d^2y = \delta Bdx^2 + \delta Ad^2x + 2Bdx\delta dx + A\delta d^2x,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

man findet ebenso:

$$\delta dz = \delta\alpha dx + \alpha\delta dx,$$
$$\delta d^2z = \delta\beta dx^2 + \delta\alpha d^2x + 2\beta dx\delta dx + \alpha\delta d^2x,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

wenn man diese Werthe in dem Ausdruck δZ des Artikels I substituirt und die Glieder ordnet, erhält man:

$$\begin{aligned}\delta Z = n\delta x &+ (p + PA + 2QBdx + \cdots + \varpi\alpha + 2\chi\beta dx + \cdots)\delta dx\\ &+ (q + QA + \cdots + \chi\alpha + \cdots)\delta d^2x\\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+ N\delta y + \nu\delta z\\ &+ (Pdx + Qd^2x + \cdots)\delta A + (Qdx^2 + \cdots)\delta B + \cdots\\ &+ (\varpi dx + \chi d^2x + \cdots)\delta\alpha + (\chi dx^2 + \cdots)\delta\beta\\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Dieser Werth von δZ muss mit dem, welchen man vorher gefunden hat, identisch sein; vergleicht man also die mit δdx, δd^2x, ... behafteten Glieder, so erhält man die Gleichungen:

$$\frac{Z}{dx} = p + PA + 2QBdx + \cdots + \varpi\alpha + 2\chi\beta dx + \cdots,$$
$$q + QA + \cdots + \chi\alpha + \cdots = 0.$$

Wird die zweite differentiirt und von der ersten abgezogen, so hat man:

$$\frac{Z}{dx} = p - dq + \cdots + PA + QBdx - AdQ + \cdots + \varpi\alpha + \chi\beta dx - \alpha d\chi + \cdots.$$

Wird dieselbe Gleichung mit d^2x multiplicirt und dann zu dieser, multiplicirt mit dx, hinzugefügt, so kommt:

$$Z = pdx + Pdy + \varpi dz + qd^2x - dqdx + Qd^2y - dQdy + \chi d^2z - d\chi dz + \cdots$$

Wenn man differentiirt und das, was sich aufhebt, weglässt, erhält man, wegen:

$$dZ = ndx + Ndy + \nu dz + pd^2x + Pd^2y + \cdots,$$
$$(n - dp + d^2q + \cdots)dx + (N - dP + d^2Q + \cdots)dy + (\nu - d\varpi + d^2\chi + \cdots)dz = 0,$$

eine Gleichung, welche von selbst identisch besteht, und welche folglich zeigt, dass die am Ende des Artikels I gefundenen Gleichungen so beschaffen sind, dass aus zweien die dritte nothwendig folgt.

IX.

Problem II. Die Formel $\int Z$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen, unter der Annahme, dass Z irgend eine algebraische Function ist, welche aus den Veränderlichen x, y, z mit ihren Differentialen dx, dy, dz, d^2x, d^2y, ... und der Grösse $\Pi = \int Z'$ zusammengesetzt ist, wo Z' irgend eine andere algebraische Function von den Veränderlichen x, y, z und ihren Differentialen dx, dy, dz, d^2x, d^2y, ... allein ist.

Lösung. Es sei, wenn man mittelst δ differentiirt,

$$\begin{aligned}\delta Z = L\delta\Pi &+ n\,\delta x + p\,\delta dx + q\,\delta d^2x + \cdots\\ &+ N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2y + \cdots\\ &+ \nu\,\delta z + \varpi\delta dz + \chi\,\delta d^2z + \cdots,\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\delta Z' = n'\delta x &+ p'\delta dx + q'\delta d^2x + \cdots\\ &+ N'\delta y + P'\delta dy + Q'\delta d^2y + \cdots\\ &+ \nu'\delta z + \varpi'\delta dz + \chi'\delta d^2z + \cdots.\end{aligned}$$

Nun hat man, nach Voraussetzung,

$$\delta\Pi = \delta\int Z' = \int\delta Z' = \int(n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x + \cdots);$$

also:

$$\begin{aligned}\delta\int Z = \int\delta Z = \int(n\,\delta x + p\,\delta dx + q\,\delta d^2x + \cdots)\\ + \int L\int(n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x + \cdots).\end{aligned}$$

Der erste Theil lässt sich, wie im Problem I, zurückführen auf:

$$\int(n - dp + d^2q - \cdots)\delta x + (p - dq + \cdots)\delta x + (q - \cdots)d\delta x + \cdots.$$

Was den zweiten betrifft, so formt man ihn zuerst um in:

$$\begin{aligned}&\int L\cdot\int(n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x + \cdots)\\ &-\int[\int L\cdot(n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x + \cdots)].\end{aligned}$$

Nun sei der ganze Werth des Integrals $\int L$ durch Π dargestellt. Nimmt man diese Grösse Π als constant an, so kommt die vorstehende transformirte Gleichung auf diese zurück:

$$\int[(\Pi - \int L)(n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x + \cdots)],$$

welche sich leicht durch theilweise Integrationen transformiren lässt in:

$$\int [n'(H-\int L)-d\cdot p'(H-\int L)+d^2\cdot q'(H-\int L)-\cdots]\delta x$$
$$+[p'(H-\int L)-d\cdot q'(H-\int L)+\cdots]\delta x$$
$$+[q'(H-\int L)-\cdots]d\delta x+\cdots.$$

Setzt man also zur Abkürzung:

$$n+n'(H-\int L)=(n),$$
$$p+p'(H-\int L)=(p),$$
$$q+q'(H-\int L)=(q),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

und ebenso:

$$N+N'(H-\int L)=(N),$$
$$P+P'(H-\int L)=(P),$$
$$Q+Q'(H-\int L)=(Q),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

wie auch

$$\nu+\nu'(H-\int L)=(\nu),$$
$$\varpi+\varpi'(H-\int L)=(\varpi),$$
$$\chi+\chi'(H-\int L)=(\chi),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

so erhält man allgemein:

$$\text{D)}\begin{cases}\delta\int Z=\int[(n)-d(p)+d^2(q)-\cdots]\delta x\\ \quad+\int[(N)-d(P)+d^2(Q)-\cdots]\delta y\\ \quad+\int[(\nu)-d(\varpi)+d^2(\chi)-\cdots]\delta z\\ \quad+[(p)-d(q)+\cdots]\delta x+[(q)-\cdots]\delta dx+\cdots\\ \quad+[(P)-d(Q)+\cdots]\delta y+[(Q)-\cdots]\delta dy+\cdots\\ \quad+[(\varpi)-d(\chi)+\cdots]\delta z+[(\chi)-\cdots]\delta dz+\cdots=0,\end{cases}$$

eine Gleichung, die auf die Form der Gleichung *A*) des vorigen Problems zurückgeführt ist, daher und so weiter.

X.

Zusatz. Man müsste dieselbe Methode befolgen, wenn die Grösse Z' eine andere unbestimmte Integralfunction $\Pi'=\int Z''$ einschlösse, sodass:

$$\begin{aligned}\delta Z' &= L'\delta\Pi' + n'\delta x + p'\delta dx + \cdots,\\ \delta Z'' &= n''\delta x + p''\delta dx + q''\delta d^2x + \cdots\\ &\quad + N''\delta y + P''\delta dy + Q''\delta d^2y + \cdots\\ &\quad + \nu''\delta z + \varpi''\delta dz + \chi''\delta d^2z + \cdots,\end{aligned}$$

wäre, nur würde $\delta\int Z$ vermehrt werden um die Formel:

$$\int L\int L'\int(n''\delta x + p''\delta dx + q''\delta d^2x + \cdots).$$

Nun lässt sich diese Formel zuerst zurückführen auf:

$$\int[(H-\int L)\,L'\int(n''\delta x + p''\delta dx + q''\delta d^2x + \cdots)],$$

und dann auf:

$$\int\{[H'-\int(H-\int L)\,L'](n''\delta x + p''\delta dx + q''\delta d^2x + \cdots)\},$$

wenn man H' für den ganzen Werth des Integrals:

$$\int(H-\int L)\,L'$$

setzt. Folglich braucht man nur noch in der Formel D) den Werth von (n) um die Grösse:

$$n''\,[H'-\int(H-\int L)\,L']$$

zu vermehren, den von (p) um die Grösse

$$p''\,[H'-\int(H-\int L)\,L']$$

und ebenso die andern.

Es ist jetzt leicht einzusehen, welches Verfahren man anwenden müsste, wenn die Formel Z'' noch eine andere Integralformel $\int Z'''$ enthielte und so weiter.

XI.

Problem III. Die Gleichung des Maximums oder Minimums der Formel $\int Z$ zu finden, wenn Z einfach durch eine Differentialgleichung gegeben wird, welche keine andern Differentiale von Z als das erste einschliesst.

Lösung. Welche Gleichung auch angenommen wird, vorausgesetzt nur, dass sie von jedem Integralzeichen befreit sei, so ist es klar, dass man sie durch Differentiation mittelst δ immer auf die Form bringen kann:

$$\begin{aligned}\delta dZ + T\delta Z = {} & n\delta x + p\delta dx + \cdots\\ & + N\delta y + P\delta dy + \cdots\\ & + \nu\delta z + \varpi\delta dz + \cdots,\end{aligned}$$

woraus man wegen $\delta dZ = d\delta Z$ erschliesst, dass der Werth von δZ ausgedrückt ist durch:

$$e^{-\int T} \int e^{\int T} (n\delta x + p\delta dx + \cdots),$$

und daher:

$$\delta \int Z = \int e^{-\int T} \int e^{\int T} (n\delta x + p\delta dx + \cdots).$$

Wenn man die bei dem vorigen Problem aufgestellten Grnndsätze befolgt, wird man annehmen, dass G der ganze Werth von $\int e^{-\int T}$ ist, und wenn man dann setzt:

$$\begin{aligned} ne^{\int T} (G - \int e^{-\int T}) &= (n) \\ pe^{\int T} (G - \int e^{-\int T}) &= (p) \\ qe^{\int T} (G - \int e^{-\int T}) &= (q) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

so findet man für den Ausdruck $\delta \int Z$ eine der obigen Formel (D) ganz ähnliche Formel.[3])

XII.

Anmerknng. Die Formeln, welche den Gegenstand der beiden letzten Probleme bilden, sind denen analog, die *Euler* im Capitel III seines Werkes über diesen Gegenstand behandelt hat.

Der Leser, welcher begierig ist unsere Lösungen mit denen zu vergleichen, die dieser gelehrte Autor durch eine andere Methode gefunden hat, wird sehen, dass sie in den Resultaten übereinstimmen, wenn man berücksichtigt, was wir im Artikel VII weiter oben gesagt haben. Übrigens ist *Euler* nicht weiter gegangen und hat keineswegs die Fälle nntersucht, wo die Formel Z von einer Differentialgleichnng höherer Ordnung abhängt. Der folgende Zusatz wird über diesen Gegenstand nichts zu wünschen übrig lassen.

XIII.

Zusatz. Nehmen wir an, dass in der vorgelegten Differentialgleichung sich Differentiale von Z von der zweiten Ordnung finden, sodass sich, wenn man mittelst δ differentiirt:

$$\delta d^2 Z + T\delta dZ + V\delta Z = n\delta x + p\delta dx + \cdots$$

ergiebt. Ich beginne damit die Charakteristik d vor die Charakteristik δ zu setzen, dann multiplicire ich die ganze Gleichung mit einer nnbestimmten Variabeln α nnd nehme davon die Summe, indem ich auf beiden Seiten das Zeichen $\int$ hinzusetze, danach transformire ich die linke Seite:

$$\int(\alpha d^2\delta Z + \alpha T d\delta Z + \alpha V\delta Z)$$

in:

$$\alpha d\delta Z + (\alpha T - d\alpha)\,\delta Z + \int[\alpha V - d(\alpha T - d\alpha)]\,\delta Z,$$

und wenn ich α so annehme, dass

$$\alpha V - d(\alpha T - d\alpha) = 0$$

ist, so habe ich die Gleichnng:

$$d\delta Z + \frac{\alpha T - d\alpha}{\alpha}\delta Z = \frac{1}{\alpha}\int(n\delta x + p\delta dx + \cdots)\,\alpha.$$

Hieraus erschliesst man leicht:

$$\delta Z = e^{-\int T'}\int\frac{e^{\int T'}}{\alpha}\int(n\delta x + p\delta dx + \cdots)\,\alpha,$$

wo T' für $\frac{\alpha T - d\alpha}{\alpha}$ gesetzt ist, nnd endlich:

$$\delta\int Z = \int e^{-\int T'}\int\frac{e^{\int T'}}{\alpha}\int(n\delta x + p\delta dx + \cdots)\,\alpha,$$

eine Formel, welche der im Artikel X behandelten gleichartig ist. Durch ein ähnliches Verfahren wird man den Ausdruck für $\delta\int Z$ finden, wenn δZ dnrch eine Differentialgleichung dritter und höherer Ordnung gegeben ist, und anf diesen Ausdrnck wird sich immer die im Problem II auseinandergesetzte Methode anwenden lassen.

XIV.

Bemerknng. Die Bedingungsgleichung:

$$\alpha V - d(\alpha T - d\alpha) = 0$$

ist von der zweiten Ordnung und kann nur in besonderen

Fällen integrirt werden; aber nnsere Lösung ist deshalb doch nicht weniger allgemein, denn um die Gleichung des Maximums oder Minimums von der Unbekannten α zn befreien, ist es nur nöthig sie mit der vorhergehenden mittelst mehrerer wiederholter Differentiationen zu verbinden; dies hat ausser der Länge der Rechnung keine Schwierigkeiten.

XV.

Anmerkung. Es ist klar, dass die Methode des vorhergehenden Zusatzes genügt, die Maxima und Minima aller denkbaren Integralformeln zu bestimmen; denn bezeichnet man mit Π die vorgelegte Formel, so wird es immer möglich sein Π durch eine Differentialgleichung, die kein Integralzeichen einschliesst, auszndrücken; auf diese Weise wird man, wenn man mittelst δ differentiirt, eine neue Gleichnng haben, welche $\delta\Pi$ mit seinen Differentialen $d\delta\Pi, \ldots$ enthält, und man wird daraus den Integralausdruck für $\delta\Pi$ erschliessen und folglich nach den gelehrten Regeln die Gleichung des Maximums oder Minimums.

Anhang I.

Mittelst der soeben auseinandergesetzten Methode kann man auch die Maxima oder Minima der krummen Oberflächen auf eine allgemeinere Weise, als man es bisher gethan hat, bestimmen.

Um dafür ein sehr einfaches Beispiel zu geben, wollen wir annehmen, dass man die Oberfläche finden soll, welche die kleinste von allen denen ist, die denselben gegebenen Umfang haben.

Nimmt man drei rechtwinklige Coordinaten x, y, z an, nnd wählt als Darstellung der Oberfläche die Gleichung:

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

so findet man als Element der Quadratur

$$dx\,dy\,\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

folglich ist die ganze Oberfläche gleich

$$\int\int dx\,dy\,\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

wo die beiden Integralzeichen zwei auf einander folgende Integrationen anzeigen, die eine in Bezug anf x, die andere in

Bezng auf y oder nmgekehrt. Man erhält daher nach nnserer Methode:

$$\delta \iint dx\,dy\,\sqrt{1+p^2+q^2} = 0,$$

was sich, wenn man differentiirt nnd dx, dy als constant annimmt, zurückführen lässt zuerst auf:

$$\iint \delta\,(dx\,dy\,\sqrt{1+p^2+q^2}) = \iint dx\,dy\,\frac{p\,\delta p + q\,\delta q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0.$$

Nun ist:

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right), \qquad q = \left(\frac{dz}{dy}\right);$$

also:

$$\delta p = \left(\frac{\delta dz}{dx}\right) = \left(\frac{d\,\delta z}{dx}\right), \qquad \delta q = \left(\frac{\delta dz}{dy}\right) = \left(\frac{d\delta z}{dy}\right);$$

daher:

$$\iint dx dy\,\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left(\frac{d\delta z}{dx}\right) + \iint dx dy\,\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left(\frac{d\delta z}{dy}\right) = 0.$$

Da in dem Ansdrucke $\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)\,d\delta z$ das Differential von δz bei constantem y bedeutet, ist es klar, dass man, um dieses Differential verschwinden zu lassen, in der Formel:

$$\iint dx\,dy\,\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)$$

nur die auf x bezügliche Integration betrachten mnss; man nehme also das Integral:

$$\int dx\,\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left(\frac{d\delta z}{dx}\right),$$

wo x allein sich ändert, dann lässt es sich leicht durch factorenweise Integration überführen in:

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\delta z - \int d\,\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\delta z,$$

was, wenn man die ersten und die letzten Werthe von z als gegeben annimmt, zurückkommt auf:

$$-\int d\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\delta z,$$

wobei das Differential von $\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ so genommen ist, dass nur x sich verändert. Es sei zur Abkürzung:

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = P;$$

dann ergiebt sich, wenn man mit dy multiplicirt und von neuem integrirt:

$$\int dy \int dx \,\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left(\frac{d\delta z}{dx}\right),$$

oder was dasselbe ist,

$$\iint dx\,dy\,\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)$$

$$= -\int dy \int dx \left(\frac{dP}{dx}\right)\delta z = -\iint dx\,dy\left(\frac{dP}{dx}\right)\delta z.$$

Man findet ebenso, wenn man nur auf die Veränderlichkeit von y achtet und Q für $\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ setzt:

$$\int dy\,\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left(\frac{d\delta z}{dy}\right) = Q\delta z - \int dy\left(\frac{dQ}{dy}\right)\delta z = -\int dy\left(\frac{dQ}{dy}\right)\delta z,$$

und:

$$\iint dx\,dy\,\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left(\frac{d\delta z}{dy}\right) = -\iint dx\,dy\left(\frac{dQ}{dy}\right)\delta z.$$

Substituirt man diese Werthe in der obigen Gleichung, so wird sie:

$$-\iint dx\,dy\left[\left(\frac{dP}{dx}\right)+\left(\frac{dQ}{dy}\right)\right]\delta z = 0,$$

und diese Gleichung muss unabhängig von δz richtig sein; man erhält also allgemein für alle Punkte der gesuchten Oberfläche:

$$\left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{dQ}{dy}\right) = 0;$$

dies zeigt, dass die Grösse $Pdy - Qdx$, nämlich:

$$\frac{pdy - qdx}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

ein vollständiges Differential sein muss. Das Problem kommt also darauf zurück p und q unter der Bedingung zu suchen, dass:

$$pdx + qdy \quad \text{und} \quad \frac{pdy - qdx}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

beide vollständige Differentiale sind.

Es ist klar, dass man diesen Bedingungen genügt, wenn man p und q constant macht, was irgend eine Ebene für die gesuchte Oberfläche ergiebt, dies ist jedoch nur ein ganz besonderer Fall, denn die allgemeine Lösung muss so beschaffen sein, dass der Umfang der Oberfläche willkürlich angenommen werden kann.[4])

Wenn die gesuchte Oberfläche nur ein Minimum unter denen sein soll, die gleiches Volumen haben, dann müsste, da $zdxdy$ das Volumen-Element ist, die Formel $\iint z\,dx\,dy$ dieselbe bleiben, während die andere Formel $\iint dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}$ sich ändert; man würde daher zu gleicher Zeit die beiden Gleichungen haben:

$$\delta\left(\iint z dx dy\right) = 0 \quad \text{und } \delta\left(\iint dx\,dy\,\sqrt{1 + p^2 + q^2}\right) = 0,$$

nämlich:

$$\iint dx dy \delta z = 0 \quad \text{und} \iint dx dy \left[\left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{dQ}{dy}\right)\right] \delta z = 0.$$

Wenn man die erste mit irgend einem Coëfficienten k multiplicirt und zu der zweiten hinzufügt, erhält man:

$$\iint dxdy\left[k+\left(\frac{dP}{dx}\right)+\left(\frac{dQ}{dy}\right)\right]\delta z=0,$$

woraus man die allgemeine Gleichnng zieht:

$$k+\left(\frac{dP}{dx}\right)+\left(\frac{dQ}{dy}\right)=0,$$

welche immer stattfindet, wenn:

$$(P+kx)\,dy-Q\,dx$$

ein vollständiges Differential ist. Somit ist die Frage darauf znrückgeführt, p nnd q nnter der Bedingnng zn snchen, dass, wenn $p\,dx+q\,dy$ ein vollständiges Differential ist, auch:

$$\frac{p\,dy-q\,dx}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+kx\,dy$$

ein solches ist.

Die allgemeine Gleichung der Kugel ist:

$$(z-a)^2+(y-b)^2+(x-c)^2=r,$$

was ergiebt:

$$dz=\frac{(y-b)\,dy+(x-c)\,dx}{\sqrt{r^2-(y-b)^2-(x-c)^2}};$$

also:

$$p=\frac{x-c}{\sqrt{r^2-(y-b)^2-(x-c)^2}},\quad q=\frac{y-b}{\sqrt{r^2-(y-b)^2-(x-c)^2}},$$

also:

$$\frac{p\,dy-q\,dx}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+kx\,dy=\left(\frac{1}{r}+k\right)x\,dy-\frac{1}{r}y\,dx+\frac{b\,dx-c\,dy}{r},$$

was ein vollständiges Differential ist, wenn man hat

$$\frac{1}{r}+k=-\frac{1}{r}.^{5)}$$

Anhang II.

Es sei vorgeschrieben unter allen Vielecken, die eine gegebene Anzahl von gegebenen Seiten haben, das zu finden, dessen Flächeninhalt am grössten ist.

Die Methode dieser Abhandlung ist auch bei Aufgaben dieser Art anwendbar, denn wenn y irgend eine Ordinate des Vielecks, x die entsprechende Abscisse ist, so hat man als endliches Element des Flächeninhalts

$$\left(y + \frac{1}{2}\,dy\right) dx,$$

wie man sich leicht durch den Anblick einer sehr einfachen Figur versichert, demnach ist der ganze Flächeninhalt:

$$\int (y + \frac{1}{2}\,dy)\,dx.$$

Also ist unserer Methode zufolge:

$$\delta\left[\int (y+\frac{1}{2}dy)dx = \int\left[\delta y\,dx + \frac{1}{2}\delta dy\,dx + (y+\frac{1}{2}dy)\delta dx\right] = 0.\right.$$

Nun ist jede Seite des Polygons allgemein $\sqrt{dx^2 + dy^2}$; daher erhält man:

$$\delta\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dx\,\delta dx + dy\,\delta dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = 0,$$

das heisst:

$$dx\,\delta dx + dy\,\delta dy = 0,$$

und

$$\delta dx = -\frac{dy\,\delta dy}{dx};$$

substituirt man diesen Werth von δdx in der vorhergehenden Gleichung, so wird sie diese:

$$\int\left[dx\,\delta y + \left(\frac{1}{2}\,dx - \frac{y\,dy}{dx} - \frac{1}{2}\,\frac{dy^2}{dx}\right)\delta dy\right] = 0.$$

Setzt man an Stelle von δdy das gleichwerthige $d\,\delta y$ und schreibt zur Abkürzung:

$$\frac{1}{2}\,dx - \frac{y\,dy}{dx} - \frac{1}{2}\,\frac{dy^2}{dx} = z,$$

so erhält man die Formel $z\,d\,\delta y$, welche man factorenweise integriren muss, um das Differential von δy verschwinden zu lassen. Zu diesem Zwecke bemerke ich, dass man im Falle endlicher Differenzen hat:

$$d(z\delta y)=dz\delta y+zd\delta y+dzd\delta y=zd\delta y+dz(\delta y+d\delta y),$$

und wenn man mit $\delta y'$ das Glied, welches auf δy folgt, bezeichnet:

$$d(zdy)=zd\delta y+dz\delta y';$$

also:

$$z\delta y=\int zd\delta y+\int dzdy',$$

also:

$$\int zd\delta y=z\delta y-\int dz\delta y',$$

oder, was dasselbe ist:

$$\int zd\delta y=z\delta y-\int d`z\delta y,$$

$d`z$ sei das Glied, welches dz vorausgeht, und welches folglich mit δy multiplicirt ist; substituirt man diese Werthe in der obigen Gleichung, so wird sie:

$$z\delta y+\int(dx-d`z)\,\delta y=0.$$

Nehmen wir an, das Vieleck schneide die Axe in zwei Punkten, sodass das erste und das letzte y gleich Null seien, ebenso wie ihre Differentiale δy; dann verschwindet das Glied $z\delta y$, welches ausserhalb des Zeichens $\int$ steht, und man hat einfach:

$$\int(dx-d`z)\,\delta y=0,$$

was allgemein ergiebt:

$$dx-d`z=0,$$

das heisst, wenn man integrirt:

$$a=x-`z=x'-z=x+dx-z=x+dx-\frac{1}{2}dx+\frac{ydy}{dx}+\frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx};$$

multiplicirt man mit dx und reducirt, so hat man:

$$adx=(x+\frac{1}{2}dx)dx+(y+\frac{1}{2}dy)dy=\frac{1}{2}d(x^2)+\frac{1}{2}d(y^2);$$

und integrirt man von neuem:

$$2ax+r^2=x^2+y^2.$$

Das ist die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt in der x-Axe liegt; daher sieht man, dass das gesuchte Polygon in den halben Umfang eines Kreises eingeschrieben werden kann.

Wenn die Basis des Polygons gegeben wäre, dann müsste das letzte δx gleich Null sein; nun ist:

$$\delta x = -\int \frac{dy\, d\delta y}{dx},$$

es muss also der ganze Werth von $\int \frac{dy\,\delta dy}{dx}$ gleich Null sein, während gleichzeitig der von:

$$\int \left[dx\delta y + \left(\frac{1}{2}\, dx - \frac{y dy}{dx} - \frac{1}{2}\, \frac{dy^2}{dx} \right) d\delta y \right]$$

auch gleich Null ist. Deshalb multiplicire man die erste Formel mit einem unbestimmten Coëfficienten k und füge sie zur zweiten hinzu. Man erhält so:

$$\int \left[dx\delta y + \left(k\, \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\, dx - \frac{y dy}{dx} - \frac{1}{2}\, \frac{dy^2}{dx} \right) d\delta y \right] = 0;$$

wenn man also:

$$k\, \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\, dx - \frac{y dy}{dx} - \frac{1}{2}\, \frac{dy^2}{dx} = z$$

setzt, gelangt man, wie oben, zu der Gleichung:

$$a = x + dx - z,$$

welche, wenn man mit dx multiplicirt, auf die Gleichung

$$a dx = k dy + \frac{1}{2}\, d(x^2) + \frac{1}{2}\, d(y^2)$$

zurückkommt, deren Integral

$$ax + b^2 = ky + \frac{1}{2}\, y^2 + \frac{1}{2}\, x^2$$

die allgemeine Gleichung eines Kreises ist, woraus sich das Theorem ergiebt, dass das grösste Vieleck, welches man mit gegebenen Seiten bilden kann, dasjenige ist, welches in einen Kreis eingeschrieben werden kann.

Herr *Cramer* hat dieses Theorem synthetisch in einer Abhandlung bewiesen, welche unter denen der Akademie von Berlin für das Jahr 1752 gedruckt ist.

Wenn man verlangt, dass die Seiten des Polygons nicht jede im besondern gegeben sind, sondern nur ihre Summe, das heisst der Umfang des Vielecks, so setze man einfach das Differential des Integrals $\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$ gleich Null, was die Gleichnng giebt:

$$\delta \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \frac{dx\delta dx + dy\delta dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = 0,$$

die gleichzeitig mit der Gleichnng des Maximums statthaben muss:

$$\int \left[dx\delta y + \frac{1}{2}\, dx\delta dy + (y + \frac{1}{2}\, dy)\, \delta dx \right] = 0.$$

Multiplicirt man nnn eine dieser Gleichungen mit einem unbestimmten Coëfficienten k und fügt sie zusammen, so hat man allgemein:

$$\int \left[dx\delta y + \left(\frac{1}{2} dx + \frac{k dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}\right)\delta dy + \left(y + \frac{1}{2} dy + \frac{k dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}\right)\delta dx \right] =$$

Es werde gesetzt:

$$\frac{1}{2} dx + \frac{k dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = z, \quad y + \frac{1}{2} dy + \frac{k dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = u,$$

dann hat man:

$$\int (dx\delta y + z\delta dy + u\delta dx) = 0,$$

eine Gleichung, welche sich durch dieselbe Methode wie oben transformiren lässt in:

$$z\delta y + u\delta x - \int [(dx - d`z)\delta y - d`u\delta x] = 0,$$

worans man erschliesst:

$$dx - d`z = 0 \quad \text{und} \quad d`u = 0.$$

Man erhält nnn, wenn man integrirt:

$$x - `z = a, \quad \text{nämlich } x + dx - z = a,$$
$$`u = b, \quad \text{nämlich } u = b,$$

das heisst, wenn man für z und u ihre Werthe substituirt,

$$x+\frac{1}{2}dx-\frac{k\,dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=a,\quad y+\frac{1}{2}dy+\frac{k\,dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=b.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit dx, die zweite mit dy und fügt dann beide zusammen, so ergiebt sich:

$$(x+\tfrac{1}{2}\,dx)dx+(y+\tfrac{1}{2}\,dy)\,dy=a\,dx+b\,dy,$$

und durch Integration:

$$\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{2}\,y^2=ax+by+r^2,$$

die allgemeine Gleichung eines Kreises. Nimmt man wieder dieselben Gleichungen und quadrirt sie, nachdem man die Glieder $x+\frac{1}{2}\,dx$ und $y+\frac{1}{2}\,dy$ umgestellt hat, so erhält man:

$$\frac{k^2\,dy^2}{dx^2+dy^2}=(a-x-\frac{1}{2}\,dx)^2,\quad \frac{k^2\,dx^2}{dx^2+dy^2}=(b-y-\frac{1}{2}\,dy)^2;$$

werden diese Gleichungen zusammengefügt, so ergeben sie:

$$\begin{aligned}k^2&=(a-x-\tfrac{1}{2}\,dx)^2+(b-y+\tfrac{1}{2}\,dy)^2\\&=a^2+b^2-2ax-2by+x^2+y^2\\&\quad-(a-x)\,dx-(b-y)\,dy+\tfrac{1}{4}\,dx^2+\tfrac{1}{4}\,dy^2\\&=a^2+b^2+r^2-\tfrac{1}{4}\,dx^2-\tfrac{1}{4}\,dy^2,\end{aligned}$$

(wegen:

$$x^2+y^2-2ax-2by=r^2$$

und

$$(a-x)\,dx+(b-y)\,dy=\tfrac{1}{2}\,dx^2+\tfrac{1}{2}\,dy^2),$$

also:

$$\sqrt{dx^2+dy^2}=2\sqrt{a^2+b^2+r^2-k^2}.$$

Dies zeigt, dass alle Seiten des Polygons einander gleich sein müssen, und dass folglich das Polygon regelmässig sein muss.

Was die Glieder $z\delta y$ nnd $u\delta x$ betrifft, so ist es klar, dass diese Glieder von selbst verschwinden, wenn man die ersten und die letzten x und y als gegeben annimmt. Wenn aber zwar die Basis des Vielecks gegeben und gleich c wäre, nicht aber die Ordinate y, welche ihr entspricht, so müsste man $u = 0$ und $z = 0$ machen, wenn $x = c$ ist; man hätte daher $b = 0$, $c = a$, nnd die Basis c würde der Durchmesser des Kreises werden, der dem Vieleck nmgeschrieben ist.[6])

Über die Methode der Variationen.

Von

Lagrange.

Aus den Miscellanea Taurinensia. Tom. IV, S. 163—187 (1770).

I.

Ich habe im zweiten Bande der Miscellanea Taurinensia eine neue Methode für die Lösung der Probleme gegeben, bei denen es sich darum handelt die Curven zu finden, welche eine Eigenschaft des Maximums oder Minimums besitzen. Diese Methode, welche man sehr gut nach *Euler* Methode der Variationen nennen kann, war schon seit 1755 diesem grossen Geometer mitgetheilt worden, der sie seiner Aufmerksamkeit und seines Beifalls für würdig hielt, wie aus verschiedenen Briefen hervorgeht, die er mir über diesen Gegenstand geschrieben hat und die noch in meinem Besitze sind. In einem dieser Briefe, welcher vom 2. October 1759 datirt ist, drückt er sich in folgender Weise aus:

»Eure analytische Lösung des isoperimetrischen Problems enthält, wie ich sehe, alles, was man bei diesem Gegenstande wünschen kann, und ich freue mich sehr, dass diese Theorie, die ich seit den ersten Versuchen fast allein behandelt hatte, gerade von Euch zu dem höchsten Grade der Vollendung gebracht worden ist. Die Wichtigkeit der Sache hat mich veranlasst mit Hilfe Eurer neuen Einsicht selbst eine analytische Lösung zu verfassen, die ich aber nicht eher bekannt machen will, als bis Ihr Eure Überlegungen veröffentlicht habt, um Euch nicht den geringsten Theil des Euch gebührenden Ruhmes zu entziehen.« In der That hat *Euler* seitdem im Bande X der Neuen Commentarien von Petersburg (gedruckt im Jahre 1766) zwei ziemlich umfangreiche Abhandlungen über diesen

Gegenstand gegeben, in welchen er mich als Entdecker jener Methode ehrenvoll erwähnt, und deren Grundsätze und Anwendungen mit vielen Einzelheiten und grosser Genauigkeit auseinandersetzt.*)[7]

Nach so deutlichen Zeugnissen von Seiten eines Geometers wie *Euler* musste ich überrascht sein von der geringen Gerechtigkeit, die mir andere Geometer erwiesen haben, welche sich seit kurzem mit demselben Gegenstande beschäftigten. Herr *Fontaine* hat soeben in dem Bande der Pariser Academie der Wissenschaften für das Jahr 1769 eine Abhandlung gegeben, welche den Titel führt: Zusatz zu der Methode für die Lösung der Probleme der Maxima und Minima. Der Autor fängt, ohne irgend welche Begründung, damit an zu behaupten, dass: »Ich mich auf dem neuen Wege, den ich eingeschlagen, verirrt habe, da ich die wahre Theorie nicht kannte.« Dann giebt er, um für den behaupteten Fehler meiner Methode Ersatz zu bieten, zwei andere, welche er für neu und allen bekannten Methoden über diesen Gegenstand überlegen hält. Ich glaube nichts besseres zu meiner Rechtfertigung thun zu können, als die Kenner zu bitten, das Werk des Herrn *Fontaine* zu lesen, und es mit meinem und dem von *Euler* zu vergleichen. Man wird, wenn ich mich nicht täusche, sehen, dass von den beiden Methoden des Herrn *Fontaine* die eine nichts anderes ist, als die, welche *Euler* in seinem ausgezeichneten Werke: Methodus inveniendi lineas curvas etc. gegeben hat, und welche er später verliess, um die meinige anzunehmen, und dass die zweite im Grunde nichts anderes als meine Methode ist, von der sie sich nur durch die unbestimmte und unvollkommene Art der Darstellung unterscheidet.[8])

Die anderen Geometer, über die ich mich auch in gewisser Weise zu beklagen habe, obgleich aus einem ganz andern Grunde, sind die Pauliner Mönche *Le-Seur* und *Jacquier*, welche soeben in Parma ein sehr gutes Lehrbuch der Integralrechnung veröffentlicht haben.

Diese Gelehrten, welche die hauptsächlichen Methoden, die sich auf die Integralrechnung beziehen, zu vereinigen beabsichtigten, haben die neue Methode der Variationen nicht vergessen, sondern ihr sogar ein ganzes Capitel im zweiten Bande ihres Werkes gewidmet. Es wäre natürlich und sogar

*) Siehe die Seiten 12 und 97 des citirten Bandes.

billig gewesen, dass sie meine Abhandlung von 1762 irgendwo erwähnt hätten, besonders da sie davon, wie sie es gethan haben, mehrere Seiten ganz abgeschrieben haben*); dennoch würde ich weit entfernt sein ihnen diese Unterlassung vorzuwerfen, wenn sie sich begnügt hätten die Methode, um die es sich handelt, auseinander zu setzen, ohne jemand zu citiren, wie sie es an anderen Stellen desselben Bandes**) gethan haben; aber da sie durch die Citation der Abhandlungen von *Euler*, von denen wir oben gesprochen, ihm diese Methode zueignen zu wollen scheinen, möchte ich hervorheben, dass ich davon der erste Urheber bin, und dass ich ihren Besitz mit niemand theile.

Ich muss noch bemerken, dass die Herren *Le-Seur* und *Jacquier* sich nicht genau ausdrücken, wenn sie sagen (S. 531 des II. Bandes), dass *Euler* gezeigt hat, dass in den Trajectorien, welche irgend eine Anzahl von Körpern beschreiben, das Integral der Geschwindigkeit, multiplicirt mit dem Elemente der Curve, immer ein Maximum oder ein Minimum ist. *Euler* hat über diesen Gegenstand nur das gegeben, was man in einem Anhange zu seinem ausgezeichneten Werke über isoperimetrische Probleme findet; wo er zeigt, dass die Trajectorie, die ein Körper bei der Einwirkung von irgend welchen centralen Kräften beschreiben soll, dieselbe ist, wie die Curve, die man findet, wenn man annimmt, dass das Integral der Geschwindigkeit, multiplicirt mit dem Elemente der Curve, ein Maximum oder Minimum wäre.

Die Anwendung dieses schönen Theorems auf irgend ein System von Körpern, und besonders die Art sich desselben zu bedienen, um mit der grössten Einfachheit und Allgemeinheit alle Probleme der Dynamik aufzulösen, gehört mir allein zu, und dies beweist unwiderlegbar der Umstand, dass diese Theorie von denselben Grundsätzen wie die der Variationen abhängt, und beide zusammen in demselben Bande der Miscellanea Taurinensia für die Jahre 1760 und 1761 erschienen sind. Ich könnte hinzufügen, dass ich auch meine Entdeckung seit 1756 *Euler* mitgetheilt habe, und da dieser grosse Geometer die Güte hatte sie durch seine Zustimmung zu ehren,

*) Siehe die Seiten 521 u. f. des genannten Bandes und die Seiten 174 u. f. des Bd. II der Miscellanea Taurinensia.

**) Siehe die Seiten 448 u. f. dieses Bandes und die Seiten 179 u. f. des Bd. III der Miscellanea Taurinensia.

zweifle ich nicht, dass er bereit wäre, wenn sich die Gelegenheit böte, mir in Betreff dieses Gegenstandes die gleiche Gerechtigkeit zu erweisen, wie er es in Bezug auf die Methode der Maxima nnd Minima zu thnn so freundlich war.[9])

II.

Obgleich die Methode, welche im Bd. II der Miscellanea Taurinensia gegeben wnrde, genügt, um die Variation jeder Function zn finden, die aus beliebig vielen Variabeln gebildet ist und so viele Integralzeichen, als man will, enthält, so lässt sie sich doch noch in einigen Beziehungen verallgemeinern und vereinfachen, wie jetzt gezeigt werden soll.

Es sei φ die Function, von der man die Variation $\delta\varphi$ finden will. Nehmen wir an, dass diese Function φ durch eine Differentialgleichung von irgend einem Grade zwischen φ nnd x, y, z, . . . und den Differentialen dieser Variabeln gegeben sei. Bezeichnen wir diese Gleichung mit $\Phi = 0$ nnd differentiiren wir mittelst δ, so erhält man $\delta\Phi = 0$; da nun Φ eine gegebene Function von φ, x, y, z, . . . , $d\varphi$, dx, dy, dz, . . . ist, wird man diese Fnnction differentiiren, indem man jede der Grössen φ, x, y, . . . $d\varphi$, dx, dy, . . . als besondere Veränderliche ansieht, nnd wenn man die Differentiale mit δ bezeichnet, erhält man:

$$\begin{aligned}\delta\Phi = {} & p\delta\varphi + p'\delta d\varphi + p''\delta d^2\varphi + p'''\delta d^3\varphi + \cdots \\ & + q\delta x + q'\delta dx + q''\delta d^2x + q'''\delta d^3x + \cdots \\ & + r\delta y + r'\delta dy + r''\delta d^2y + r'''\delta d^3y + \cdots \\ & + s\delta z + s'\delta dz + s''\delta d^2z + s'''\delta d^3z + \cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = 0,\end{aligned}$$

wo p, p', p'', . . . , q, q', q'', . . . gegebene Functionen von φ, x, y, z, . . . , $d\varphi$, dx, dy, . . . sind.

Jetzt sieht man leicht, dass $\delta d\varphi$ dasselbe wie $d\delta\varphi$ ist, $\delta d^2\varphi$ dasselbe wie $d^2\delta\varphi$, nnd ebenso die anderen ähnlichen Ausdrücke, woraus sich ergiebt, dass die vorstehende Gleichung immer auf die Form gebracht werden kann:

$$\text{A)}\quad \left\{\begin{aligned} & p\delta\varphi + p'd\delta\varphi + p''d^2\delta\varphi + p'''d^3\delta\varphi + \cdots \\ & + q\delta x + q'd\delta x + q''d^2\delta x + q'''d^3\delta x + \cdots \\ & + r\delta y + r'd\delta y + r''d^2\delta y + r'''d^3\delta y + \cdots \\ & + s\delta z + s'd\delta z + s''d^2\delta z + s'''d^3\delta z + \cdots \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = 0,\end{aligned}\right.$$

nnd die ganze Schwierigkeit kommt jetzt darauf zurück, den Werth von $\delta\varphi$ aus dieser Gleichung zu ermitteln.

Um auf eine allgemeine Weise dahin zu gelangen, multiplicire ich sie mit einer Unbestimmten ξ nnd nehme dann von jedem Gliede das Integral, was mir ergiebt:

$$\begin{aligned}
&\int p\xi\delta\varphi + \int p'\xi d\delta\varphi + \int p''\xi d^2\delta\varphi + \int p'''\xi d^3\delta\varphi + \cdots \\
&+ \int q\xi\delta x + \int q'\xi d\delta x + \int q''\xi d^2\delta x + \int q'''\xi d^3\delta x + \cdots \\
&+ \int r\xi\delta y + \int r'\xi d\delta y + \int r''\xi d^2\delta y + \int r'''\xi d^3\delta y + \cdots \\
&+ \int s\xi\delta z + \int s'\xi d\delta z + \int s''\xi d^2\delta z + \int s'''\xi d^3\delta z + \cdots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \text{const.}
\end{aligned}$$

Wird nun factorenweise integrirt, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
\int p'\xi d\delta\varphi &= p'\xi\delta\varphi - \int d(p'\xi)\delta\varphi, \\
\int p''\xi d^2\delta\varphi &= p''\xi d\delta\varphi - d(p''\xi)\delta\varphi + \int d^2(p''\xi)\delta\varphi,
\end{aligned}$$

und so fort; macht man daher diese Substitutionen in der vorhergehenden Gleichung und setzt zur Abkürzung:

$$\begin{aligned}
P &= p\xi - d(p'\xi) + d^2(p''\xi) - d^3(p'''\xi) + \cdots, \\
P' &= p'\xi - d(p''\xi) + d^2(p'''\xi) - \cdots, \\
P'' &= p''\xi - d(p'''\xi) + \cdots, \\
P''' &= p'''\xi - \cdots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q &= q\xi - d(q'\xi) + d^2(q''\xi) - d^3(q'''\xi) + \cdots, \\
Q' &= q'\xi - d(q''\xi) + d^2(q'''\xi) - \cdots, \\
Q'' &= q''\xi - d(q'''\xi) + \cdots, \\
Q''' &= q'''\xi - \cdots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R &= r\xi - d(r'\xi) + d^2(r''\xi) - d^3(r'''\xi) + \cdots, \\
R' &= r'\xi - d(r''\xi) + d^2(r'''\xi) - \cdots, \\
R'' &= r''\xi - d(r'''\xi) + \cdots, \\
R''' &= r'''\xi - \cdots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S &= s\xi - d(s'\xi) + d^2(s''\xi) - d^3(s'''\xi) + \cdots, \\
S' &= s'\xi - d(s''\xi) + d^2(s'''\xi) - \cdots, \\
S'' &= s''\xi - d(s'''\xi) + \cdots, \\
S''' &= s'''\xi - \cdots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

so erhält man:

$$\text{B)}\quad \left\{\begin{array}{l} \int(P\delta\varphi + Q\delta x + R\delta y + S\delta z + \cdots) \\ + P'\delta\varphi + P''d\delta\varphi + P'''d^2\delta\varphi + \cdots \\ + Q'\delta x + Q''d\delta x + Q'''d^2\delta x + \cdots \\ + R'\delta y + R''d\delta y + R'''d^2\delta y + \cdots \\ + S'\delta z + S''d\delta z + S'''d^2\delta z + \cdots \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \text{const.} \end{array}\right.$$

Setzt man weiter zur Abkürzung:

$$\begin{array}{l} {}^{1}\Psi = P\delta\varphi + Q\delta x + R\delta y + S\delta z + \cdots, \\ \Pi = P'\delta\varphi + P''d\delta\varphi + P'''d^2\delta\varphi + \cdots \\ \quad + Q'\delta x + Q''d\delta x + Q'''d^2\delta x + \cdots \\ \quad + R'\delta y + R''d\delta y + R'''d^2\delta y + \cdots \\ \quad + S'\delta z + S''d\delta z + S'''d^2\delta z + \cdots \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{array}$$

so wird die vorstehende Gleichung:

$$\Pi + \int {}^{1}\Psi = \text{const.},$$

und es ist klar, dass diese Constante nichts anderes ist als der Werth von Π, wenn das Integral $\int {}^{1}\Psi$ gleich Null ist; wenn man nun diesem Integral eine gewisse bestimmte Ausdehnung giebt, ist es ersichtlich, dass die Grösse Π auch einen bestimmten Werth erhalten wird; nennt man also Γ den Werth von Π, der dem Anfange des Integrals $\int {}^{1}\Psi$ entspricht, und Δ den Werth von Π, welcher dem Ende desselben Integrals entspricht, so hat man die Gleichung:

$$\Delta = \Gamma - \int {}^{1}\Psi.$$

Nun nehme ich die Grösse ξ, die noch willkürlich ist, so an, dass man $P = 0$ in der ganzen Ausdehnung des Integrals $\int {}^{1}\Psi$ hat; was die Differentialgleichung ergiebt:

$$p\xi - d(p'\xi) + d^2(p''\xi) - d^3(p'''\xi) + \cdots = 0.$$

Der Werth von ξ wird nun ebenso viele willkürliche Constanten enthalten als die Anzahl der Glieder dieser Gleichung vermindert um eins beträgt; und folglich auch so viele als es im Ausdrucke von Π Glieder giebt, welche $\delta\varphi$ und seine Differentiale enthalten. Daher wird die Zahl der willkürlichen

Constanten von ξ um eine Einheit grösser sein als die der Grössen P'', P''', ...; man kann daher immer diese Constanten so annehmen, dass man in der Grösse Δ: $P'' = 0$, $P''' = 0$ hat, sodass die Differentiale von $\delta\varphi$ vollständig verschwinden.

Wenn man also der grösseren Einfachheit halber die Grössen, welche sich auf den Anfang des Integrals $\int \Psi$ beziehen, in eckige Klammern einschliesst, und in runde Klammern diejenigen, die sich auf das Ende desselben Integrals beziehen, erhält man allgemein:

$$\text{C)} \quad \begin{cases} (P'\delta\varphi) = [P'\delta\varphi + P''d\delta\varphi + P'''d^2\delta\varphi + \cdots \\ \quad + Q'\delta x + Q''d\delta x + Q'''d^2\delta x + \cdots \\ \quad + R'\delta y + R''d\delta y + R'''d^2\delta y + \cdots \\ \quad + S'\delta z + S''d\delta z + S'''d^2\delta z + \cdots \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots] \\ \quad - (Q'\delta x + Q''d\delta x + Q'''d^2\delta x + \cdots \\ \quad + R'\delta y + R''d\delta y + R'''d^2\delta y + \cdots \\ \quad + S'\delta z + S''d\delta z + S'''d^2\delta z + \cdots \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots) \\ \quad - \int (Q\delta x + R\delta y + S\delta z + \cdots), \end{cases}$$

und die Variable ξ muss so bestimmt werden, dass man $P = 0$ erhält, oder:

$$p\xi - d(p'\xi) + d^2(p''\xi) - d^3(p'''\xi) + \cdots = 0,$$

und dass weiter:

$$(P'') = 0, \qquad (P''') = 0, \ldots$$

ist.

III.

Sehen wir jetzt, welchen Gebrauch man von diesen Formeln bei Aufgaben der Maxima und Minima machen kann, und nehmen wir an, dass es sich darum handele die Beziehung zu finden, welche zwischen den Variabeln x, y, z, ... bestehen muss, damit die Function φ ein Maximum oder Minimum wird.

Wir bemerken zuerst, dass diese Function, da sie durch eine Differentialgleichung $\Phi = 0$ gegeben wird, nothwendig eine gewisse Anzahl von willkürlichen Constanten einschliesst,

welche gleich dem Exponenten des höchsten Differentials von φ in der Gleichung $\Phi = 0$ sein wird.

Weiter muss, der Natur des Problems nach, die Function φ unbestimmte Integralansdrücke einschliessen, und die Beschaffenheit der Aufgabe wird den Ort bestimmen, wo man diese Integrale anfangen lassen muss. Nehmen wir an, dass dies stattfinde, wenn $x = a$, $y = b$, $z = c$, . . ., so ist es klar, dass die entsprechenden Werthe von φ und den Differentialen gegebenen Functionen von a, b, c, . . ., da, db, dc, . . . nnd willkürlichen Constanten sind, welche in den Ansdruck von φ eintreten; sodass, wenn die Zahl dieser Constanten μ ist, das heisst, wenn $d^{\mu}\varphi$ das höchste Differential von φ in dem Werthe von Φ ist, dann die Werthe der Grössen φ, $d\varphi$, $d^2\varphi$, . . . bis $d^{\mu-1}\varphi$, wenn $x = a$, $y = b$, $z = c$, . . ., willkürlich sind nnd als gegeben angesehen werden dürfen.

Dieses festgesetzt, wollen wir annehmen, dass der Werth von φ, welcher ein Maximnm oder Minimum sein soll, derjenige ist, welcher dem Orte, wo $x = l$, $y = m$, $z = n$, . . . ist, entspricht; die Variation dieses Werthes von φ muss also gleich Null sein, sodass, wenn man sie durch die Charakteristik δ bezeichnet, an demselben Orte $\delta\varphi = 0$ ist. Anf diese Art hat man in der Formel C) nur anznnehmen, dass das Integral $\int(Q\delta x + R\delta y + \cdots)$ auf die Weise genommen wird, dass es anfängt, wenn $x = a$, $y = b$, $z = c$, . . ., und dass es aufhört, wenn $x = l$, $y = m$, $z = n$, . . . ist, sodass die Grössen, welche in dieser Formel sich in eckige Klammern eingeschlossen fiuden, auf den Ort, wo $x = a$, $y = b$, $z = c$, . . ., bezogen sind, und diejenigen, welche in rnnde Klammern eingeschlossen sind, auf den Ort, wo $x = l$, $y = m$, $z = n$, . . ., bezogen sind; da nun die Aufgabe verlangt, dass die Variation in diesem zweiten Ort gleich Null ist, wird man das Glied $(P'\delta\varphi) = 0$ machen, was die gesuchte Gleichung für das Maximnm oder Minimum ergiebt. Da nun diese Gleichnng ans zwei Theilen zusammengesetzt ist, von denen einer alle Glieder, welche unter dem Integralzeichen sind, enthält, und der andere nur aus denen zusammengesetzt ist, die ausserhalb des Zeichens stehen, so mnss man zwei getrennte Gleichungen aus diesen beiden Theilen ansetzen, was ergiebt:

$$\text{D)} \qquad 0 = \int(Q\delta x + R\delta y + S\delta z + \cdots),$$

$$\text{E)}\quad \begin{cases} 0 = & [P'\delta\varphi + P''d\delta\varphi + P'''d^2\delta\varphi + \cdots \\ & + Q'\delta x + Q''d\delta x + Q'''d^2\delta x + \cdots \\ & + R'\delta y + R''d\delta y + R'''d^2\delta y + \cdots \\ & + S'\delta z + S''d\delta z + S'''d^2\delta z + \cdots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots] \\ & -(Q'\delta x + Q''d\delta x + Q'''d^2\delta x + \cdots \\ & + R'\delta y + R''d\delta y + R'''d^2\delta y + \cdots \\ & + S'\delta z + S''d\delta z + S'''d^2\delta z + \cdots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots). \end{cases}$$

Die Gleichung D) ergiebt allgemein, für alle Werthe der Grössen x, y, z, ... von $x = a$, $y = b$, $z = c$, ... bis $x = l$, $y = m$, $z = n$, ..., diese:

$$\text{F)}\qquad Q\delta x + R\delta y + S\delta z + \cdots = 0.$$

Nun muss diese Gleichnng stattfinden, welches auch die mit δ bezeichneten Differentiale sind. Wenn es nun, nach der Natnr des Problems, keine gegebene Relation zwischen den Variabeln x, y, z, ... giebt, sind die Differentiale δx, δy, δz ... unabhängig von einander, nnd man muss für sich die Gleichungen $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0$, ... ansetzen. Wenn aber zum Beispiel die Variabeln x, y, z, ... so beschaffen sein sollen, dass man immer:

$$Xdx + Ydy + Zdz + \cdots = 0$$

hat, dann erhält man auch, wenn man d in δ verwandelt:

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + \cdots = 0,$$

also:

$$\delta x = -\frac{Y}{X}\delta y - \frac{Z}{X}\delta z - \cdots,$$

was, in der Gleichung F) substituirt, diese ergiebt:

$$(RX - QY)\,\delta y + (SX - QZ)\,\delta z + \cdots = 0,$$

sodass man für sich die Gleichungen:

$$RX - QY = 0, \qquad SX - QZ = 0, \ldots.$$

ansetzen müsste.

Allgemein mnss man die Differentiale δx, δy, δz, ... auf die möglichst kleinste Anzahl zurückführen nnd dann den Coëfficienten von jedem der übrig bleibenden gleich Nnll setzen. Diese Gleichungen zusammen mit den gegebenen, wenn es

deren nach der Natur des Problems giebt, dienen dazu die Relation zwischen den Variabeln x, y, z zu finden, welche nöthig ist, damit die Function φ ein Maximum oder Minimum wird.

Nnn ist es leicht zu sehen, dass diese Relation immer durch eine oder mehrere Differentialgleichungen gegeben ist, sodass die Integration darin nothwendig willkürliche Constanten einführt; daher bleibt noch übrig die Relation zwischen diesen Constanten zu finden, die nothwendig ist, damit die Function φ ein Maximum oder ein Minimum wird. Dazn wird man mit Hilfe der Gleichnng E) gelangen. In der That ist es klar, dass man, da diese Gleichnng sich auf bestimmte Werthe von x, y, z, ... bezieht, ihr mittelst der Constanten, von denen wir sprachen, genügen kann. Dazu wird man bemerken, dass die Differentiale $d\delta\varphi$, $d^2\delta\varphi$, ..., $d\delta x$, $d^2\delta x$, ... dieselben sind wie diese: $\delta d\varphi$, $\delta d^2\varphi$, ..., δdx, δd^2x, ..., wie wir es oben gesehen haben; sodass, wenn man durch f den Werth von φ bezeichnet, welcher sich auf den Ort bezieht, wo $x = a$, $y = b$, ... ist, nnd wenn man ebenso durch F', F'', F''', ..., A', A'', A''', ..., B', B'', B''', ... C', C'', C''', ... die Werthe von P', P'', P''', ..., Q', Q'', Q''', ..., R', R'', R''', ..., S', S'', S''', ... an demselben Ort bezeichnet, und durch L', L'', L''', ..., M', M'', M''', ..., N' N'', N''' ... die Werthe von Q', Q'', Q''', ..., R', R'', R''', ..., S', S'', S''', ... an der Stelle, wo $x = l$, $y = m$, $z = n$, ... ist, diese bestimmte Gleichung erhalten wird:

$$\text{G)}\quad \left\{\begin{array}{l} F'\delta f + F''\delta df + F'''\delta d^2 f + \cdots \\ + A'\delta a + A''\delta da + A'''\delta d^2 a + \cdots \\ + B'\delta b + B''\delta db + B'''\delta d^2 b + \cdots \\ + C'\delta c + C''\delta dc + C'''\delta d^2 c + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ - L'\delta l - L''\delta dl - L'''\delta d^2 l - \cdots \\ - M'\delta m - M''\delta dm - M'''\delta d^2 m - \cdots \\ - N'\delta n - N''\delta dn - N'''\delta d^2 n - \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = 0. \end{array}\right.$$

Um Gebrauch von dieser Gleichung zu machen, wird man zuerst sehen, ob es nach der Natur des Problems gegebene Relationen zwischen den Grössen f, a, b, c, ..., l, m, n, ... und ihren Differentialen giebt, und indem man den aus den gegebenen Relationen folgenden Werth eines oder mehrerer

der Differentiale dieser Grössen, welche mit dem Zeichen δ behaftet sind, substituirt, wird man den Coëfficienten eines jeden der übrig bleibenden gleich Null setzen und ebenso viele Bedingungen erhalten, als zur vollständigen Lösung des Problems nöthig sind.

IV.

Wir haben oben gesehen, dass die Werthe von φ, $d\varphi, \ldots$, wenn $x = a$, $y = b, \ldots$ ist, das heisst die Werthe von f, $df, \ldots$, als gegeben angesehen werden können; wenn sie auf eine von den Grössen a, b, c, $\ldots$ unabhängige Weise gegeben sind, dann ist es klar, dass man $\delta f = 0$, $\delta df = 0, \ldots$ erhält. Man kann aber annehmen, dass diese Grössen gegebene Functionen von a, b, c, $\ldots$ und ihren Differentialen sein sollen. In diesem Falle ist:

$$\delta f = \pi\delta a + \varrho\delta b + \sigma\delta c + \cdots, \quad \delta df = \pi'\delta a + \varrho'\delta b + \cdots,$$

und man muss diese Werthe in der Gleichung G) substituiren.

Weiter kann es vorkommen, dass die Function φ, welche ein Maximum oder Minimum sein soll, die Grössen a, b, c, $\ldots$, l, m, n, $\ldots$ mit ihren Differentialen enthält; dann werden diese Grössen in den Ausdruck von Φ eintreten, und ihre Variationen in dem Werthe von $\delta\Phi$ die Glieder geben:

$$\begin{array}{llll}
 & \alpha\delta a & + \alpha'\delta da & + \alpha''\delta d^2a + \cdots \\
+ & \beta\delta b & + \beta'\delta db & + \beta''\delta d^2b + \cdots \\
+ & \gamma\delta c & + \gamma'\delta dc & + \gamma''\delta d^2c + \cdots \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
+ & \lambda\delta l & + \lambda'\delta dl & + \lambda''\delta d^2l + \cdots \\
+ & \mu\delta m & + \mu'\delta dm & + \mu''\delta d^2m + \cdots \\
+ & \nu\delta n & + \nu'\delta dn & + \nu''\delta d^2n + \cdots \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,}
\end{array}$$

sodass man diese Glieder der linken Seite der Gleichung A) hinzufügen muss. Hieraus ist leicht zu ersehen, dass man der linken Seite der Gleichung B) die Glieder hinzufügen muss:

$$
\begin{array}{l}
\quad \delta a \int \alpha\xi + \delta da \int \alpha'\xi + \delta d^2 a \int \alpha''\xi + \cdots \\
+ \delta b \int \beta\xi + \delta db \int \beta'\xi + \delta d^2 b \int \beta''\xi + \cdots \\
+ \delta c \int \gamma\xi + \delta dc \int \gamma'\xi + \delta d^2 c \int \gamma''\xi + \cdots \\
\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ \delta l \int \lambda\xi + \delta dl \int \lambda'\xi + \delta d^2 l \int \lambda''\xi + \cdots \\
+ \delta m \int \mu\xi + \delta dm \int \mu'\xi + \delta d^2 m \int \mu''\xi + \cdots \\
+ \delta n \int \nu\xi + \delta dn \int \nu'\xi + \delta d^2 n \int \nu''\xi + \cdots \\
\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

Folglich muss man alle diese Glieder der bestimmten Gleichung E) oder G) mit dem entgegengesetzten Zeichen hinzufügen, indem man Sorge trägt alle Integrale $\int \alpha\xi$, $\int \alpha'\xi$, ... so zu nehmen, dass sie gleich Null sind, wenn $x = a$, $y = b$, ... ist, und dass sie vollständig sind, wenn $x = l$, $y = m$, ... ist.

Daher wird in diesem Falle die Gleichung G):

$$
\text{H)}\begin{cases}
0 = F'\delta f + F''\delta df + F'''\delta d^2 f + \cdots \\
\quad + (A' - \int \alpha\xi)\delta a + (A'' - \int \alpha'\xi)\delta da + (A''' - \int \alpha''\xi)\delta d^2 a + \cdots \\
\quad + (B' - \int \beta\xi)\delta b + (B'' - \int \beta'\xi)\delta db + (B''' - \int \beta''\xi)\delta d^2 b + \cdots \\
\quad + (C' - \int \gamma\xi)\delta c + (C'' - \int \gamma'\xi)\delta dc + (C''' - \int \gamma''\xi)\delta d^2 c + \cdots \\
\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\quad - (L' - \int \lambda\xi)\delta l - (L'' - \int \lambda'\xi)\delta dl - (L''' - \int \lambda''\xi)\delta d^2 l - \cdots \\
\quad - (M' - \int \mu\xi)\delta m - (M'' - \int \mu'\xi)\delta dm - (M''' - \int \mu''\xi)\delta d^2 m - \cdots \\
\quad - (N' - \int \nu\xi)\delta n - (N'' - \int \nu'\xi)\delta dn - (N''' - \int \nu''\xi)\delta d^2 n - \cdots \\
\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

V.

Da Differentialgleichungen eigentlich nicht die Differentiale selbst, sondern nur ihre Verhältnisse enthalten, so ist es klar, dass die Function Φ, welche die linke Seite der vorgelegten Gleichung $\Phi = 0$ bildet, als eine Function von φ, x, y, z, ..., $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, ..., $\frac{d\frac{d\varphi}{dx}}{dx}$, $\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}$, $\frac{d\frac{dz}{dx}}{dx}$, ... angesehen werden kann. Nehmen wir der grösseren Allgemeinheit wegen an, dass man $\Phi = \Sigma dx^m$ hat, wo Σ eine Function von φ, x, y, z, ... $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, ... $\frac{d\frac{d\varphi}{dx}}{dx}$, $\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}$, ... ist,

so erhält man durch Differentiation mittelst δ:

$$\delta\Phi = m\Sigma dx^{m-1}\delta dx + dx^m\delta\Sigma,$$

die Gleichnng $\Phi = 0$ ergiebt aber $\Sigma = 0$; also ist:

$$\delta\Phi = dx^m\delta\Sigma.$$

Nun sei:

$$\begin{aligned}\delta\Sigma = {} & \pi\delta\varphi + \pi'\delta\frac{d\varphi}{dx} + \pi''\delta\frac{d\frac{d\varphi}{dx}}{dx} + \cdots \\ & + \varrho dy + \varrho'\delta\frac{dy}{dx} + \varrho''\delta\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} + \cdots \\ & + \sigma dz + \sigma'\delta\frac{dz}{dx} + \sigma''\delta\frac{d\frac{dz}{dx}}{dx} + \cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \tau\delta x.\end{aligned}$$

Multiplicirt man also mit ξdx^m und integrirt factorenweise, sodass unter dem Integralzeichen nur die Differentiale δx, $\delta\varphi$, δy, δz, ... bleiben, so erhält man einen Ausdruck, welcher identisch ist mit dem Ausdrucke $\Pi + \int\Psi$ des Artikels II, sodass die Grössen ansserhalb des Integralzeichens identisch mit der Grösse Π, und die Grössen unter dem Integralzeichen identisch mit der Grösse Ψ sind.

Betrachten wir nur die Grössen, welche ansserhalb des Zeichens sind, so sage ich, dass sie, wenn man in ihnen δ in d verwandelt, von selbst gleich Null werden. In der That:

1) Das Glied $\pi\delta\varphi$, welches keiner factorenweisen Integration fähig ist, wird immer ganz unter dem Integralzeichen bleiben.

2) Das Glied $\pi'\delta\frac{d\varphi}{dx}$ wird zuerst:

$$\pi'\left(\frac{\delta d\varphi}{dx} - \frac{d\varphi\delta dx}{dx^2}\right),$$

sodass, wenn man mit ξdx^m multiplicirt und $\delta d\varphi$, δdx in $d\delta\varphi$, $d\delta x$ verwandelt, das Integral kommt:

$$\int\xi\pi' dx^m\left(\frac{d\delta\varphi}{dx} - \frac{d\varphi d\delta x}{dx^2}\right);$$

hieraus ergiebt sich durch factorenweise Integration als Glied ausserhalb des Integralzeichens:

$$\xi\pi' dx^m \left(\frac{\delta\varphi}{dx} - \frac{d\varphi\delta x}{dx^2}\right).$$

Verwandeln wir jetzt δ in d, so werden diese Glieder:

$$\xi\pi' dx^m \left(\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}\right) = 0.$$

3) Das Glied $\pi''\delta \frac{d\frac{d\varphi}{dx}}{dx}$ ergiebt, wenn man der grösseren Einfachheit wegen $\frac{d\varphi}{dx} = \varphi'$ setzt,

$$\pi'' \left(\frac{\delta d\varphi'}{dx} - \frac{d\varphi'\delta dx}{dx}\right),$$

woraus man zuerst, wie oben, die Glieder ausserhalb des Integralzeichens findet:

$$\xi\pi'' dx^m \left(\frac{\delta\varphi'}{dx} - \frac{d\varphi'\delta x}{dx^2}\right);$$

diese werden, wenn man δ in d verwandelt,

$$\xi\pi'' dx^m \left(\frac{d\varphi'}{dx} - \frac{d\varphi'}{dx}\right) = 0,$$

und so fort.

Man wird die gleiche Schlussfolgerung auch für die andern Glieder des Werthes von $\delta\Sigma$ machen, und daraus schliessen, dass, wenn man in dem Ausdrucke Π die Charakteristik δ in die gewöhnliche Charakteristik d verwandelt, Π immer gleich Null wird. Nun hat man allgemein (Art. II):

$$\Pi + \int \Psi = \text{const.};$$

daher erhält man, wenn $\Pi = 0$ ist,

$$\int \Psi = \text{const.},$$

und daher $\Psi = 0$. Es ist aber:

$$\Psi = P\delta\varphi + Q\delta x + R\delta y + S\delta z + \cdots;$$

wenn man daher δ in d verwandelt, hat man immer:

$$Pd\varphi + Qdx + Rdy + Sdz + \cdots = 0,$$

und diese Gleichung findet identisch statt. Hieraus ist leicht zu erschliessen, dass sich die Gleichungen des Maximums oder Minimums, welche aus der allgemeinen Gleichung F) des Artikels III folgen, immer auf eine weniger zurückführen lassen. Denn sobald alle Gleichungen ausser einer statthaben, ergiebt sich diese eine immer nothwendig aus den anderen. Da in der That die Gleichungen, um welche es sich handelt, unabhängig von den mit δ bezeichneten Differentialen sind, ist es klar, dass sie ebenso statthaben müssen, wenn man annimmt, dass diese Differentiale dieselben werden wie die mit d bezeichneten; in diesem Falle aber wird die Gleichung F), welche alle besonderen Gleichungen für das Maximum oder Minimum einschliesst, eine Identität, wie wir es soeben gezeigt haben; daher und so weiter.

Ich hatte diese Behauptung schon im Artikel VIII meiner im Bande II der Miscellanea Taurinensia gedruckten Abhandlung mit wenigen Worten bewiesen, aber der Beweis, den ich soeben dafür gab, hat den Vorzug sehr viel einfacher und allgemeiner zu sein.

Übrigens sieht man durch diesen Beweis, dass das Theorem aufhören würde richtig zu sein, wenn die Function Φ nicht auf die Form Σdx^m reducibel wäre, wo Σ irgend eine Function von φ, x, y, z, ..., $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, ..., $\frac{d\frac{d\varphi}{dx}}{dx}$, $\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}$, ... ist; freilich muss dies immer nach der Natur der Differentialgleichungen von selbst stattfinden.

Wenn es sich aber um endliche Differenzen handelte, sodass die Differentiale $d\varphi$, dx, dy, ..., welche in die gegebene Gleichung $\Phi = 0$ eintreten, endliche Differenzen von φ, x, y, ... sind, dann würde die Bedingung, von der wir sprachen, nicht mehr nöthig sein und könnte sehr gut in der Function Φ nicht statthaben. Man kann in dem zweiten Anhange der citirten Abhandlung ein Beispiel der Rechnung sehen, die man im Falle endlicher Differenzen anstellen kann; wir sagen hier nichts davon, um uns nicht zu weit von unserem Gegenstande zu entfernen, können aber vielleicht ein anderes Mal darauf zurückkommen.

VI.

Nehmen wir an, dass man:

$$\varphi = \int Z,$$

hat, wo Z eine Function von x, y, z, ... und ihren Differentialen ist; man erhält so durch Differentiation (um das Zeichen $\int$ verschwinden zu lassen) die Gleichung:

$$Z - d\varphi = 0,$$

welche, mit der Gleichung $\Phi = 0$ verglichen:

$$\Phi = Z - d\varphi$$

und daher:

$$\delta\Phi = \delta Z - \delta d\varphi$$

ergiebt. Es sei

$$\begin{aligned}\delta Z = {} & q\delta x + q'\delta dx + q''\delta d^2x + \cdots \\ & + r\delta y + r'\delta dy + r''\delta d^2y + \cdots \\ & + s\delta z + s'\delta dz + s''\delta d^2z + \cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\end{aligned}$$

dann hat man für $\delta\Phi$ denselben Ausdruck wie in Artikel II, wenn man:

$$p = 0, \quad p' = -1, \quad p'' = 0, \quad p''' = 0, \ldots$$

setzt. Man erhält also zuerst:

$$P = -d\xi, \quad P' = \xi, \quad P'' = 0, \quad P''' = 0, \ldots$$

und hat, da die Variable ξ durch die Gleichung $P = 0$ bestimmt ist:

$$d\xi = 0$$

und daher:

$$\xi = \text{const.},$$

diese Constante darf man, der Einfachheit wegen, gleich eins setzen. Was die Gleichungen $(P'') = 0$, $(P''') = 0$, ... betrifft, so ist es klar, dass sie, wegen $P'' = 0$, von selbst statthaben.

Man setze nun überall 1 an Stelle von ξ, so erhält man für das Maximum oder Minimum der Function φ: 1) die variable Gleichung F), 2) die constante Gleichung G) (Art. III). Man muss in Betreff dieser letzten Gleichung beachten, dass man ebenso, wie man $P' = \xi = 1$, $P'' = 0$, ... hat, auch

$F' = 1$, $F'' = 0$, $F''' = 0, \ldots$ erhält. Weiter ergiebt sich, da der Werth von φ Null ist, wenn das Integral $\int Z$ anfängt, $f = 0$ und folglich $\delta f = 0$, sodass man in der Gleichnng G) alle mit δf, $\delta df, \ldots$ behafteten Glieder ganz weglassen mnss.

Wenn man diese Lösung mit derjenigen vergleicht, die wir im Artikel I der erwähnten Abhandlnng gegeben haben, so sieht man, dass sie vollständig mit einander übereinstimmen; die variable Gleichnng F) entspricht der Gleichung, die wir dort mit B) bezeichnet haben, und die constante Gleichnng, die wir hier G) nennen, entspricht der Gleichnng C) derselben Stelle, wenn man auf die Bemerknng achtet, welche wir über die Art der Vervollständigung der Gleichung C) gemacht haben, woraus wir schlossen, dass der vollständige Ansdruck dieser Gleichung:

$$M' - 'M = 0$$

war, wo M' die Glieder darstellt, welche wir in der Gleichung G) mit $L'\delta l + L''\delta dl + \cdots$, und $'M$ die Glieder, die wir mit $A'\delta a + A''\delta da + \cdots$ bezeichnet haben.

VII.

Es sei ferner:

$$\varphi = \int Z,$$

wo Z eine Function von x, y, $z, \ldots$ nnd ihren Differentialen und zu gleicher Zeit von der Grösse:

$$(\varphi) = \int (Z)$$

ist; (Z) bedeute ebenfalls eine Fnnction von x, y, $z, \ldots$ und ihren Differentialen. Man erhält also, indem man differentiirt:

$$Z - d\varphi = 0,$$

und wenn man darauf abermals, mittelst δ, differentiirt:

$$\delta Z - \delta d\varphi = 0.$$

Nnn sei:

$$\begin{aligned}\delta Z = {} & q\delta x + q'\delta dx + q''\delta d^2x + \cdots \\ & + r\delta y + r'\delta dy + r''\delta d^2y + \cdots \\ & + s\delta z + s'\delta dz + s''\delta d^2z + \cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \pi\delta(\varphi).\end{aligned}$$

Bezeichnen wir, um abzukürzen, diesen Werth von δZ mit:

$$\delta V + \pi\delta(\varphi),$$

sodass δV alle mit δx, $d\delta x$, ... δy, $d\delta y$, ... behafteten Glieder ausdrückt, so erhält man also:

$$\delta V + \pi\delta(\varphi) - \delta d\varphi = 0.$$

Da nun $(\varphi) = \int(Z)$ war, so ist zunächst, wenn man differentiirt, $d(\varphi) = (Z)$, und dann, wenn mittelst δ differentiirt wird:

$$\delta d(\varphi) = d\delta(\varphi) = \delta(Z);$$

man wird also diesen Werth in der vorigen Gleichung substituiren. Dazu differentiirt man sie, nachdem man sie durch π getheilt hat, was:

$$d\delta(\varphi) + d\frac{\delta V}{\pi} - d\frac{\delta d\varphi}{\pi} = 0$$

ergiebt, und erhält:

$$\text{I)} \qquad \delta(Z) + d\frac{\delta V}{\pi} - d\frac{\delta d\varphi}{\pi} = 0,$$

wo $\delta(Z)$ von der Form ist:

$$\begin{aligned}\delta(Z) = \quad & (q)\delta x + (q')\delta dx + (q'')\delta d^2x + \cdots \\ & + (r)\delta y + (r')\delta dy + (r'')\delta d^2y + \cdots \\ & + (s)\delta z + (s')\delta dz + (s'')\delta d^2z + \cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Man behandelt jetzt die Gleichung I) ebenso, wie wir die Gleichung $\delta\Phi = 0$ des Artikels II behandelt haben; zu diesem Zwecke multiplicirt man sie mit ξ und integrirt sie dann factorenweise, was zuerst ergiebt:

$$\xi\frac{\delta V}{\pi} - \xi\frac{\delta d\varphi}{\pi} + \int\left[\xi\delta(Z) - \frac{d\xi}{\pi}\delta V + \frac{d\xi}{\pi}\delta d\varphi\right] = \text{const.};$$

wenn man nun für δV und $\delta(Z)$ ihre Werthe substituirt, so gestattet die Grösse unter dem Integralzeichen genau die Reductionen, welche wir in dem erwähnten Artikel gemacht haben, und die Rechnung lässt sich auf dieselbe Art durchführen. Wir begnügen uns hier zu bemerken, dass man im gegenwärtigen Falle finden wird:

$$P = -d\frac{d\xi}{\pi}, \quad P' = \frac{d\xi}{\pi}, \quad P'' = -\frac{\xi}{\pi}, \quad P''' = 0, \ldots\ldots,$$

sodass man für die Bestimmung der Variabeln ξ die Gleichung:

$$d\frac{d\xi}{\pi} = 0$$

hat, welche:

$$\frac{d\xi}{\pi} = g \qquad \text{und} \qquad \xi = h + g\int\pi$$

giebt, wo h und g zwei willkürliche Constanten sind.

Nun muss $(P'') = 0$ sein, das heisst der Werth von P'', welcher dem Punkte $x = l$, $y = m$, ... entspricht, ist Null (Art. II); also muss, da $P'' = \frac{\xi}{\pi}$, der Werth von ξ in diesem Falle gleich Null sein. Es sei nun Π der Werth von $\int\pi$, der demselben Orte entspricht, so hat man:

$$h + g\Pi = 0,$$

woraus folgt:

$$h = -g\Pi;$$

also:

$$\xi = g\left(\int\pi - \Pi\right),$$

oder, wenn man der Einfachheit halber $g = -1$ setzt,

$$\xi = \Pi - \int\pi;$$

und daher

$$P' = -1, \quad P'' = -\frac{\Pi - \int\pi}{\pi}.$$

Hat man auf diese Weise den Werth von ξ gefunden, so muss man ihn nur noch substituiren, und findet so für das Maximum oder Minimum Formeln, welche denen des Artikels IX der schon erwähnten Abhandlung von 1762 analog sind. Man beachte nur, dass man hier, wie in dem Falle des vorigen Problems, $f = 0$ nnd demznfolge $\delta f = 0$ hat; dann erhält man:

$$\delta df = \delta d\varphi = \delta Z,$$

wo der Werth von δZ auf den Punkt $x = a$, $y = b$,

$z = c, \ldots$ zu beziehen ist. In diesem Pnnkte aber hat man auch:

$$(\varphi) = \int (Z) = 0,$$

also:

$$\delta\,(\varphi) = 0;$$

sodass der Werth von $\delta\, df$ gleich dem Werthe wird, welchen die Grösse:

$$\begin{array}{l} q\delta x + q'\delta dx + q''\delta d^2x + \cdots \\ r\delta y + r'\delta dy + r''\delta d^2y + \cdots \\ s\delta z + s'\delta dz + s''\delta d^2z + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

annimmt, wenn $x = a$, $y = b$, $z = c, \ldots$ ist.

Was die Werthe von $\delta d^2 f$, $\delta d^3 f, \ldots$ anbetrifft, so ist es nicht nöthig sie zu suchen, da sie gar nicht in die bestimmte Gleichung G) eintreten.

Man ersieht aus diesen beiden Beispielen, wie man in complicirteren Fällen verfahren muss; daher sagen wir hier weiter nichts darüber. Wir begnügen uns mit der allgemeinen Bemerkung, dass die unbestimmte Veränderliche ξ immer durch Integration der Gleichung $P = 0$ bestimmt wird, sobald die Function φ durch einen Ausdruck gegeben ist, welcher beliebig aus x, y, $z, \ldots$ und ihren Differentialen gebildet ist und so viele Integralzeichen enthält, als man will. Wenn jedoch die Function φ durch eine Differentialgleichung von irgend welchem Grade gegeben ist, dann hängt die Unbestimmte ξ von einer Differentialgleichung desselben Grades ab, welche nicht integrirbar sein kann; dies wärc aber kein Hinderniss für die Lösnng des Problems; denn sobald man die Gleichungen des Maximums oder Minimums gefunden hat, braucht man nur die Grösse ξ mittelst der Differentialgleichung $P = 0$ zu eliminiren; später muss man bei der Einführung willkürlicher Constanten auf die Bedingungen $(P'') = 0$, $(P''') = 0, \ldots$ Acht haben.

VIII.

Die besonderen Vorzüge meiner Mcthode der Variationen für die Lösung der Probleme der Maxima und Minima bestehen:

1) In der Einfachheit und Allgemeinheit der Rechnung, wie man sich leicht überzeugen kann, indem man diese Methode mit derjenigen vergleicht, welche *Euler* in seinem ausgezeichneten Werke: Methodns inveniendi lineas curvas etc. gegeben hat, und sogar mit der, welche *Fontaine* soeben in seiner Abhandlung: Zusatz zur Methode und so weiter gegeben hat, die schon oben erwähnt wurde.

2) Darin, dass meine Methode die bestimmten Gleichungen liefert, welche dazu dienen, die Probleme auf eine allgemeinere und vollständigere Weise, als man es vor mir gemacht hat, zu lösen. Obgleich diese Gleichungen eine nöthige und natürliche Folge meiner Analysis der Variationen sind, und ihr Gebranch nur eine sehr einfache Anwendung der Principien der allgemeinen Methode der Maxima und Minima ist, hat dennoch soeben ein berühmter Geometer der Akademie der Wissenschaften in Paris in dem schon citirten Bande für das Jahr 1767 eine gelehrte Abhandlung gegeben, in welcher er die Genauigkeit gerade dieser bestimmten Gleichungen nnd besonders die Anwendnng in Zweifel zu ziehen scheint, welche ich in meiner schon erwähnten Abhandlung im zweiten Bande der Königlichen Gesellschaft bei der Lösnng des Problems des schnellsten Falles gemacht habe. Um die Bedenken dieses gelehrten Mathematikers anfzuklären, und zu gleicher Zeit die Anwendung unserer Formeln dentlicher hervorgehen zu lassen, soll hier dasselbe Problem anf eine noch allgemeinere Weise gelöst werden durch Hinzufügung neuer Betrachtungen, welche, wenn ich mich nicht täusche, nichts mehr über diesen Gegenstand zu wünschen übrig lassen. [10])

Problem. Sind nach Art und Lage zwei beliebige Cnrven gegeben, die in derselben Ebene liegen, so soll eine dritte Cnrve gefunden werden, auf welcher ein schwerer Körper von einer zur andern der beiden gegebenen Curven in möglichst kurzer Zeit gelangt.

Nehmen wir eine horizontale Gerade als Abscissen-Axe der beiden gegebenen Curven nnd der gesuchten Curve, und eine verticale Gerade als die gemeinsame Ordinaten-Axe derselben Curven an. Es seien a, b die Abscisse und Ordinate der ersten gegebenen Cnrve, das heisst derjenigen, von welcher der Körper ansgehen soll, nnd l, m die Abscisse nnd Ordinate der anderen Curve, zu welcher der Körper gelangen soll; endlich seien x, y die Abscisse und Ordinate der gesuchten Curve, auf welcher sich der Körper bewegt.

Nennt man die Geschwindigkeit des Körpers u und setzt man die beschleunigende Kraft der Schwere gleich eins, so hat man bekanntlich: $u\,du = dy$, und daher $u = \sqrt{2(y-k)}$, wo k eine willkürliche Constante ist. Um sie zu bestimmen, nehmen wir an, dass an der Stelle, wo der Körper sich zu bewegen anfängt, $y = b$ ist (wo b eine der Ordinaten der ersten gegebenen Curve bedeutet), und dass die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers diejenige sei, welche er durch freien Fall von der Höhe h erlangt hätte; man muss also, wenn man $y = b$ setzt, $u = \sqrt{2h}$ haben, was $2h = 2(b-k)$ und daher $k = b - h$ ergiebt.

Dies festgesetzt, weiss man, dass die Zeit allgemein durch $\int \frac{ds}{u}$ ausgedrückt wird, wenn s der Bogen der Curve ist, sodass man durch Vergleichung dieser Formel mit der des Artikels VI:

$$\varphi = \int \frac{ds}{u}, \quad Z = \frac{ds}{u}$$

erhält. Daher ist, wegen $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ und $u = \sqrt{2(y-k)}$:

$$\delta Z = -\frac{ds\delta y}{u^3} + \frac{dx\delta dx}{uds} + \frac{dy\delta dy}{uds};$$

also:

$$q = 0, \qquad q' = \frac{dx}{uds}, \; q'' = 0, \ldots.$$

$$r = -\frac{ds}{u^3}, \; r' = \frac{dy}{uds}, \; r'' = 0, \ldots.$$

Mithin hat man, wegen $\xi = 1$ (Art. II.):

$$Q = -d\frac{dx}{uds}, \qquad Q' = \frac{dx}{uds}, \; Q'' = 0, \ldots$$

$$R = -\frac{ds}{u^3} - d\frac{dy}{uds}, \; R' = \frac{dy}{uds}, \; R'' = 0, \ldots.$$

Hieraus ergiebt sich:

1) die variable Gleichung:

$$Q\delta x + R\delta y = 0,$$

und folglich:

$$Q = 0 \quad \text{und} \quad R = 0;$$

die eine oder die andere Gleichung dient dazu die Curve des schnellsten Falles zu bestimmen, und es ist überflüssig sie alle beide zugleich zu gebrauchen, da die eine nothwendig aus der anderen folgt, denn wenn man δ in d verwandelt, erhält man die identische Gleichung $Qdx + Rdy = 0$ (Art. V.). Nimmt man also die Gleichung $Q = 0$, welche die einfachere ist, so hat man:

$$- d\frac{dx}{uds} = 0,$$

worans man durch Integration folgert:

$$\frac{dx}{ds} = fu = f\sqrt{2(y-k)},$$

und daher erhält man:

$$dx = \frac{fdy\sqrt{2(y-k)}}{\sqrt{1-2f^2(y-k)^2}}$$

als Gleichung der Brachistochrone, wo f eine willkürliche Constante ist.

2) Die constante Gleichung:

$$A'\delta a + B'\delta b - L'\delta l - M'\delta m = 0,$$

wo A', B' die Werthe von Q', R', das heisst von $\frac{dx}{uds}$, $\frac{dy}{uds}$ im ersten Punkte der Curve $x = a$, $y = b$ nnd L' M' die Werthe derselben Grössen für den letzten Punkt der Curve $x = l$, $y = m$ sind.

Um jedoch dieser constanten Gleichnng die ganze Ausdehnung zu geben, deren die Aufgabe fähig sein kann, muss man die Bemerkung beachten, welche wir in dem Artikel IV gemacht haben, und auch die Constante k, welche in den Werth von u eintritt, variiren lassen. Da nun (Art. VI):

$$\Phi = Z - d\varphi = \frac{ds}{\sqrt{2(y-k)}} - d\varphi$$

ist, muss man zu dem Werthe von $\delta\Phi$ das Glied:

$$\frac{ds\delta k}{2\sqrt{2}(y-k)^{\frac{3}{2}}} = \frac{ds}{u^3}\delta k$$

hinzufügen. Man hat also, wegen $\xi = 1$, die Grösse $-\delta k \int \frac{ds}{u^3}$ zum ersten Glied der vorigen Gleichung hinzuzufügen, welche demnach wird:

$$A'\delta a + B'\delta b - L'\delta l - M'\delta m - \delta k \int \frac{ds}{u^3} = 0,$$

wobei das Integral $\int \frac{ds}{u^3}$ so zu nehmen ist, dass es am ersten Punkte der Curve anfängt nnd am letzten Punkte endigt.

Nnn bemerke ich zuerst, dass, wenn man schon $\frac{ds}{u^3} = f$ gefunden hat, $Q' = f$ nnd folglich:

$$A' = L' = f$$

ist. Ich beachte weiter, dass, wenn man die Gleichung $R = 0$ nimmt,

$$-\frac{ds}{u^3} - d\frac{dy}{uds} = 0$$

wird, worans durch Integration:

$$\int \frac{ds}{u^3} + \frac{dy}{uds} = \text{const.}$$

oder

$$\int \frac{ds}{u^3} + R' = \text{const.}$$

folgt.

Lässt man nun das Integral am ersten Punkte der Curve anfangen, so erhält man in diesem Pnnkte $\int \frac{ds}{u^3} = 0$, und $R' = B'$; und da man im letzten Punkte der Curve $R' = M'$ hat, ist es klar, dass der vollständige Werth von $\int \frac{ds}{u^3}$ gleich $B' - M'$ ist. Wenn man weiter, da $k = b - h$ ist, allgemein annimmt, dass h eine beliebige Fnnction von a und b ist, sodass man

$$dh = Gda + Hdb$$

hat, so erhält man:

$$\delta k = \delta b - \delta h = \delta b - G\delta a - H\delta b,$$

sodass durch alle diese Substitutionen die vorige Gleichung:

$$[f-(M'-B')\,G]\,\delta a+[M'-(M'-B')\,H]\,\delta b \\ -f\delta l-M'\delta m=0$$

wird. Weil die erste Curve, deren Coordinaten a und b sind, unabhängig ist von der letzten, deren Coordinaten l und m sind, zerfällt die Gleichung zuerst in diese beiden:

$$[f-(M'-B')\,G]\,\delta a+[M'-(M'-B')\,H]\,\delta b=0,$$
$$f\delta l+M'\delta m=0.$$

Da jetzt die Coordinaten a und b einer gegebenen Curve angehören, erhält man, nach der Natur der Curve:

$$da=\varepsilon\,db, \quad \text{und} \quad dl=\eta\,dm,$$

und durch Verwandlung der Charakteristik d in δ ebenso:

$$\delta a=\varepsilon\,\delta b \quad \text{und} \quad \delta l=\eta\,\delta m;$$

substituirt man nun diese Werthe in der vorigen Gleichung, so ist:

$$[f-(M'-B')\,G]\,\varepsilon+M'-(M'-B')\,H=0,$$
$$f\eta+M'=0;$$

oder wenn man für ε und η wieder ihre Werthe $\frac{da}{db}$, $\frac{dl}{dm}$ setzt:

$$[f-(M'-B')\,G]\,da+[M'-(M'-B')\,H]\,db=0,$$
$$f\,dl+M'dm=0.$$

Nimmt man jetzt an, dass die Höhe h, welche der Anfangsschnelligkeit entspricht, gleich b sei, sodass der Körper auf der Brachistochrone mit derselben Schnelligkeit sich zu bewegen anfängt, die er erhalten haben würde, wenn er auf der Abscissen-Axe heruntergekommen wäre, so hat man $G=0$ und $H=1$, und die beiden vorigen Gleichungen werden:

$$f\,da+B'db=0, \qquad f\,dl+M'dm=0;$$

da aber $f=\frac{dx}{u\,ds}$, $B'=\frac{dy}{u\,ds}$ am ersten Punkte der Curve und $M'=\frac{dy}{u\,ds}$ am letzten Punkte der Curve ist, so hat man für den ersten Punkt der Curve:

$$dx\,da+dy\,db=0,$$

oder:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{db}{da},$$

und für den letzten Punkt der Curve:

$$dx\,dl + dy\,dm = 0,$$

oder:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{dm}{dl}.$$

Dies zeigt, dass die Curve des schnellsten Falles die beiden gegebenen Curven unter rechten Winkeln schneiden muss, und stimmt mit dem überein, was wir im Artikel IV der schon citirten Abhandlung des zweiten Bandes gefunden haben.

Soll aber die Anfangsgeschwindigkeit gleich Null sein, dann erhält man $h = 0$, nnd demzufolge $G = 0$ und $H = 0$, was die beiden Gleichungen giebt:

$$f\,da + M'db = 0, \qquad f\,dl + M'dm = 0.$$

Die zweite dieser Gleichungen ist dieselbe wie im vorhergehenden Falle, woraus folgt, dass die Brachistochrone auch hier die zweite Curve unter rechten Winkeln schneiden muss. Was aber die erste Curve betrifft, so ergiebt sich aus:

$$f\,da + M'db = 0$$

die Gleichung:

$$\frac{da}{db} = -\frac{M'}{f} = \frac{dl}{dm},$$

sodass man:

$$\frac{da}{db} = \frac{dl}{dm},$$

erhält.

Dies zeigt, dass die Tangente, welche an die erste Curve durch den Anfangspunkt der Brachistochrone gezogen ist, parallel der Tangente sein muss, die an die zweite Curve durch den Endpunkt der Brachistochrone gezogen ist, was vollständig mit dem Resultat der Lösung übereinstimmt, welches Herr *Chevalier de Borda* in seiner Abhandlung im Bande der Pariser Akademie der Wissenschaften für das Jahr 1767 gegeben hat.

Berlin, den 28. Mai 1770.

Abhandlung über die Unterscheidung der Maxima und Minima in der Variations-Rechnung.

Von

Legendre.

Aus den Mémoires de l'Académie royale des Sciences, année 1786, Paris 1788. S. 7—37.

Bei den meisten Problemen der Variations-Rechnung lässt schon die Natur der Frage erkennen, ob ein Maximum oder ein Minimum möglich ist, und welches von beiden man erhalten hat. Es giebt aber Fälle, in denen diese Unterscheidung nicht so leicht ist, und dies geschieht besonders, wenn die Aufgabe kein absolutes Maximum oder Minimum zulässt, wie man es bei Curven sieht, welche längs ihrer Axe wiederholte Schlangenwindungen machen und dennoch Ordinaten von Null bis Unendlich haben.

Ich habe daher gedacht, dass die Ermittelung eines Kennzeichens zur Unterscheidung der Maxima und Minima als Ergänzung zur Variations-Rechnung dienen und nicht ohne Nutzen bei den Anwendungen dieser Rechnungsart sein könnte. Die Methode, der ich für diesen Gegenstand gefolgt bin, ist analog der allgemein für algebraische Grössen gebrauchten, die Resultate sind ebenso einfach, es ist aber nicht so leicht zu ihnen zu gelangen. Man wird sogar erstaunt sein über die Menge von Differentialgleichungen, welche man in sonst wenig complicirten Fällen aufzulösen hätte. Es ist jedoch zu bemerken, dass es sich nur um die Möglichkeit dieser Gleichungen handelt, nicht um ihre wirkliche Lösung. Ich werde diese Methode in einigen allgemeinen Fällen darlegen und sie dann auf wohlbekannte Beispiele anwenden, welche mir Veranlassung zu einigen besonderen Bemerkungen zu geben schienen.

I.

Um zuerst einen sehr einfachen Fall zu betrachten, wollen wir die Formel $\int v\,dx$ nehmen, in welcher v eine Function von x, y und $\frac{dy}{dx}$ ist, was ich p nenne. Nehmen wir $\delta x = 0$ an, sodass die Variation nur y und seine Differentiale betrifft, so hat man wie gewöhnlich:

$$\delta\int v\,dx = \int dx\,\delta v = \int dx\left(\frac{\partial v}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial v}{\partial p}\,\delta p\right)^{*)}$$
$$= \int dx\left(\frac{\partial v}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial v}{\partial p}\cdot\frac{d\delta y}{dx}\right)$$
$$= \frac{\partial v}{\partial p}\,\delta y + \text{const} + \int dx\,\delta y\left[\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{dx}\,d\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)\right].$$

Bezeichnen wir mit $\left(\frac{\partial v}{\partial p}\,\delta y\right)^{\circ}$ und $\left(\frac{\partial v}{\partial p}\,\delta y\right)^{\prime}$ die Werthe von $\frac{\partial v}{\partial p}\,\delta y$ am Anfange und am Ende des Integrals, so erhalten wir:

$$\delta\int v\,dx = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\,\delta y\right)^{\prime} - \left(\frac{\partial v}{\partial p}\,\delta y\right)^{\circ} + \int dx\,\delta y\left[\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{dx}\,d\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)\right];$$

wobei das Integral, welches in dieser Formel zu ermitteln übrig bleibt, dieselben Grenzen wie das betrachtete Integral $\int v\,dx$ haben muss.

Wenn jetzt die Grösse $\int v\,dx$ ein Maximum oder ein Minimum sein soll, so ist nothwendig:

$$\text{(a)} \ldots\ldots\ \frac{\partial v}{\partial y}\,dx - d\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\,\delta y\right)^{\prime} - \left(\frac{\partial v}{\partial p}\,\delta y\right)^{\circ} = 0,$$

die Gleichung (a) ist die der verlangten Curve, die andere

*) Um jede Zweideutigkeit zu vermeiden, bezeichne ich mit $\frac{\partial v}{\partial x}$ den Coëfficienten von dx in dem Differentiale von v und mit $\frac{dv}{dx}$ das vollständige Differential von v getheilt durch dx.[11])

ergiebt Bedingnngen, welche die Grenzen des Integrals erfüllen müssen. Es handelt sich nun darum zu wissen, ob vermöge der Gleichnng (a) ein Maximum oder ein Minimum stattfindet.

Dazn muss man bei $\delta \int v dx$ die Glieder zweiter Dimension in δy und δp hinzunehmen. Die Gesammtheit dieser Glieder kann man Variation zweiter Ordnnng nennen, sie ist gleich $\delta \int v dx$, da die Variation erster Ordnung sich auf Null reducirt. Nun weiss man durch die Verallgemeinerung des *Taylor*'schen Theorems, dass, wenn man in einer Fnnction v von y und p an Stelle dieser Variabeln $y + \delta y$ und $p + \delta p$ einsetzt, die Function v übergeht in:

$$v + \frac{\partial v}{\partial y}\delta y + \frac{\partial v}{\partial p}\delta p$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\cdot\delta y^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial p}\cdot 2\delta y\delta p + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\delta p^2$$
$$+ \frac{1}{2\cdot 3}\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}\cdot\delta y^3 + \frac{1}{2\cdot 3}\frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial p}\cdot 3\delta y^3\delta p$$
$$+ \frac{1}{2\cdot 3}\frac{\partial^3 v}{\partial y \partial p^2}\cdot 3\delta y\delta p^2 \frac{1}{2\cdot 3}\frac{\partial^3 v}{\partial p^3}\cdot\delta p^3 + \cdots,$$

und da wir nur Grössen zweiter Ordnung nöthig haben, werden wir einfach:

$$\delta\int v dx = \int dx\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\cdot\delta y^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial p}\cdot 2\delta y\delta p + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\cdot\delta p^2\right)$$

erhalten. Znr Abkürzung bezeichnen wir diese Grössen mit:

$$\int dx\,(P\delta y^2 + 2Q\delta y\delta p + R\delta p^2).$$

Man bemerkt, dass der vom Integralzeichen freie Theil nur die Form $\alpha\delta y^2$ haben kann, wovon das Differential:

$$d\alpha\delta y^2 + 2\alpha dx\delta y\delta p$$

ist, nnd erhält also:

$$\delta\int v dx$$
$$= \text{const.} - \alpha\delta y^2 + \int dx\left[\left(P + \frac{da}{dx}\right)\delta y^2 + 2(Q+\alpha)\delta y\delta p + R\delta p^2\right].$$

Man kann α willkürlich annehmen. Wird es so angenommen, dass die Grösse unter dem Integralzeichen zwei gleiche Factoren hat, so dient zur Bestimmung von α die Gleichung:

$$\text{(b)} \cdots\cdots \left(P + \frac{d\alpha}{dx}\right) R = \left(Q + \alpha\right)^2,$$

und bezeichnet man, wie oben, die Werthe von $\alpha \delta y^2$ an den beiden Grenzen des Integrals mit $(\alpha \delta y^2)^0$ und $(\alpha \delta y^2)^I$, so ist:

$$\delta \int v dx = \left(\alpha \delta y^2\right)^0 - \left(\alpha \delta y^2\right)^I + \int R dx \left(\delta p + \frac{Q+\alpha}{R} \delta y\right)^2;$$

die willkürliche Constante, welche die Gleichung (b) liefert, kann immer so gewählt werden, dass:

$$(\alpha \delta y^2)^0 - (\alpha \delta y^2)^I$$

entweder gleich Null ist oder dasselbe Vorzeichen wie R hat, mithin hat $\delta \int v dx$ dasselbe Vorzeichen wie R, oder wie $\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}$.

Hieraus folgt, dass vermöge der Gleichung (a) die Grösse $\int v dx$ ein Maximum ist, wenn der Coefficient $\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}$ negativ, und ein Minimum, wenn er positiv ist.[12])

Die Anwendung dieser Regel ist, wie man sieht, sehr einfach. Es kommt nur darauf an, das Vorzeichen des Coefficienten $\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}$ zu prüfen, wobei man nöthigenfalls die Beziehung zu berücksichtigen hat, welche durch die Gleichung (a) zwischen den Veränderlichen gegeben ist.

Ich spreche nicht von dem Falle, wo $\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} = 0$ ist; er ist sehr einfach und lässt sich auf den Fall zurückführen, wo v nur x und y enthält.

II.

Nehmen wir jetzt an, dass man $dy = p dx$, $dp = q dx$ setzt, und dass die Grösse v irgend eine Function von x, y, p, q ist, sodass v implicite Differentiale zweiter Ordnung einschliesst. Wenn man dann wissen will, ob die Formel $\int v dx$ ein Maximum oder ein Minimum ist — δx immer gleich

Null angenommen —, so stelle man die Rechnung auf die gewohnte Weise an, dann ergiebt sich die bekannte Gleichung:

$$(c) \cdots\cdots\cdots \quad 0 = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{dx}\, d\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right) + \frac{1}{dx^2}\, d^2\left(\frac{\partial v}{\partial q}\right);$$

man findet auch eine Gleichung für die Grenzen des Integrals, welche ich der Kürze halber fortlasse. Sehen wir jetzt zu, ob die Gleichung (*c*) ein Maximum oder ein Minimum anzeigt.

Da die Variation erster Ordnung Null ist, so gehe ich zu derjenigen zweiter Ordnung über. Sie ergiebt:

$$\delta \int v\,dx = \int dx \left(\begin{array}{l} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\cdot \delta y^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial p}\cdot 2\delta y\delta p \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\cdot \delta p^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial q}\cdot 2\delta y\delta q \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial p\partial q}\cdot 2\delta p\delta q + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial q^2}\cdot \delta q^2 \end{array}\right).$$

Ich stelle die Grössen unter dem Integralzeichen durch:

$$dx\left(\begin{array}{l} M\delta y^2 + 2N\delta y\delta p + Q\delta p^2 \\ + 2P\delta y\delta q + 2R\delta p\delta q \\ + S\delta q^2 \end{array}\right)$$

dar. Da das Differential von $\alpha\delta y^2 + 2\beta\delta y\delta p + \gamma\delta p^2$ gleich:

$$\begin{array}{l} d\alpha\delta y^2 + 2d\beta\delta y\delta p + d\gamma\delta p^2 \\ + 2\alpha dx\delta y\delta p + 2\beta dx\delta p^2 \\ + 2\beta dx\delta y\delta q + 2\gamma dx\delta p\delta q \end{array}$$

ist, so wird:

$$\delta\int v\,dx = (\alpha\delta y^2 + 2\beta\delta y\delta p + \gamma\delta p^2)^0 - (\alpha\delta y^2 + 2\beta\delta y\delta p + \gamma\delta p^2)'$$
$$+ \int dx \left\{\begin{array}{l} \left(M + \frac{d\alpha}{dx}\right)\delta y^2 + 2\left(N + \alpha + \frac{d\beta}{dx}\right)\delta y\delta p + 2(P+\beta)\delta y\delta q \\ + \left(Q + 2\beta + \frac{d\gamma}{dx}\right)\delta p^2 + 2(R+\gamma)\delta p\delta q + S\delta q^2 \end{array}\right\}.$$

Es sei jetzt die Grösse, welche unter dem Integralzeichen bleibt, gleich:

$$\int S dx\,(\delta q + \mu\delta p + \lambda\delta y)^2,$$

dann erhält man folgende fünf Gleichungen:

$$\begin{aligned} S\mu &= R + \gamma, \\ S\lambda &= P + \beta, \\ S\mu^2 &= Q + 2\beta + \frac{d\gamma}{dx}, \\ S\mu\lambda &= N + \alpha + \frac{d\beta}{dx}, \\ S\lambda^2 &= M + \frac{d\alpha}{dx}. \end{aligned}$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Gleichung, welche jede der Grössen α, β, γ, μ, λ bestimmt, von der dritten Ordnung ist, aber es genügt eine von ihnen zu kennen, die anderen lassen sich daraus unmittelbar ableiten. Man sieht zu gleicher Zeit, dass man drei willkürliche Constanten erhält, mittelst deren man leicht bewirkt, dass die Grösse:

$$\begin{aligned} &(\alpha\delta y^2 + 2\beta\delta y\delta p + \gamma\delta p^2)^0 \\ -\ &(\alpha\delta y^2 + 2\beta\delta y\delta p + \gamma\delta p^2)' \end{aligned}$$

entweder Null ist oder dasselbe Vorzeichen wie S hat.

Folglich ist das Integral $\int v\,dx$ ein Maximum, wenn der Coëfficient $\frac{\partial^2 v}{\partial q^2}$ negativ, und ein Minimum, wenn er positiv ist. Um dieses Vorzeichen zu bestimmen, kann man von der Relation zwischen den Veränderlichen Gebrauch machen, welche die Gleichung (c) giebt.

III.

Es ist leicht, dieses Resultat zu verallgemeinern und daraus zu erschliessen, dass, wenn u die letzte der in v enthaltenen Grössen p, q, r, ... ist, die Grösse $\int v\,dx$ ein Maximum sein wird, wenn $\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}$ negativ, und ein Minimum, wenn es positiv ist. In der That, wenn m die Anzahl der Grössen p, q, r, .., u oder der Grad der in v enthaltenen Differentiale ist, so sieht man, indem man wie in den beiden vorhergehenden Fällen verfährt, dass die Zahl der unbestimmten Coefficienten ausserhalb des Integralzeichens $\frac{1}{2}m(m+1)$ ist; dass die Zahl der unbestimmten Coefficienten im Quadrat unter

dem Integralzeichen gleich m ist, und dass die Variation zweiter Ordnung von v: $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ Glieder enthält: folglich hat man ebenso viele Gleichungen als Unbekannte, da

$$\tfrac{1}{2}m(m+1)+m=\tfrac{1}{2}(m+1)(m+2)-1$$

ist; übrigens hat man nicht zu befürchten, dass irgend eine dieser Gleichungen eine Folge der andern oder unvereinbar mit ihnen ist, da jede Gleichung einen Buchstaben enthält, welcher in keiner der anderen vorkommt.

Dies alles setzt voraus, dass δx gleich Null ist, und dass man nur die Variation von y und seinen Differentialen berücksichtigt. Es wird gut sein, auch den Fall zu untersuchen, wo weder δx noch δy gleich Null sind. Indess beschränken wir uns, um nicht weitschweifig zu werden, auf den einzigen Fall der ersten Differentiale.

IV.

Betrachten wir die Formel $\int v\,dx$, in welcher v eine Function von x, y und p ist, und wo man zu gleicher Zeit x, y und ihre Differentiale erster Ordnung variiren lässt. Die Variation von $\int v\,dx$ erster und zweiter Ordnung ist:

$$\int(dx\delta v+v\,d\delta x+\delta v\,d\delta x)$$

oder

$$v\delta x+\int(dx\delta v-dv\delta x+\delta v\,d\delta x)+\text{const},$$

und indem man alle Glieder entwickelt:

$$\begin{aligned}\delta\int v\,dx=&(v\delta x)^{I}+\int dx\left(\frac{\partial v}{\partial x}\delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\delta y+\frac{\partial v}{\partial p}\delta p\right)\\&-(v\delta x)^{0}-\int\delta x\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial p}dp\right)\\&+\int dx\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}v}{\partial x^{2}}\delta x^{2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}v}{\partial x\partial y}\cdot 2\delta x\delta y+\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}v}{\partial y^{2}}\delta y^{2}\right.\\&\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}v}{\partial x\partial y}\cdot 2\delta x\delta p+\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}v}{\partial y\partial p}\cdot 2\delta y\delta p+\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}v}{\partial p^{2}}\delta p^{2}\right\}\\&+\int\left(\frac{\partial v}{\partial x}\delta x\,d\delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\delta y\,d\delta x+\frac{\partial v}{\partial p}\delta p\,d\delta x\right).\end{aligned}$$

Wenn man den Theil erster Ordnung wie gewöhnlich entwickelt und ihn gleich Null setzt, erhält man die Gleichung:

$$\text{(a)} \cdots\cdots\cdots \frac{\partial v}{\partial y}\,dx - d\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right) = 0;$$

man bekommt ausserdem eine Gleichung für die Grenzen des Integrals, welche anzuführen unnöthig ist.

Um nun zu untersuchen, ob die Gleichung ein Maximum oder ein Minimum liefert, muss man den Theil der Variation entwickeln, welcher von der zweiten Ordnung ist. Wenn wir aber diesen zweiten Theil ebenso behandeln wollten, wie wir es in den vorhergehenden Fällen gethan haben, würden wir durch das Glied $\frac{\partial v}{\partial p}\,\delta p d\delta x$ gehindert werden, welches sich einer passenden Reduction entzieht.

Diese Schwierigkeit würde jedoch nicht stattfinden, wenn man, ohne den Buchstaben p einzusetzen, $v\,dx$ als Function der vier Grössen x, y, dx, dy ansähe; diese Function wäre, in Rücksicht auf die Variabeln dx und dy, homogen und von der Dimension eins. Ohne jedoch die Schwierigkeit zu umgehen, bemerken wir, dass sie darauf beruht, dass das Glied $dx\,\frac{\partial v}{\partial p}\,\delta p$, das sich in der Variation erster Ordnung findet, eins in der Variation zweiter Ordnung giebt, nämlich $-\frac{\partial v}{\partial p}\,\delta p\,d\delta x$, wodurch das hinderliche Glied verschwindet. In der That hat man, da $dy = p\,dx$ ist:

$$\delta p = \frac{d\delta y - p\,d\delta x}{dx} - \frac{\delta p\,d\delta x}{dx},$$

und da man nur das Glied $\frac{d\delta y - p\,d\delta x}{dx}$ in der Variation erster Ordnung berücksichtigt hat, muss das zweite sich in der Variation zweiter Ordnung befinden.

Der vollständige Werth von $\delta\int v\,dx$ ist demnach

$$\int dx\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,\delta x^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\cdot 2\,\delta x\delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\,\delta y^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial p}\cdot 2\,\delta x\delta p + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial p}\cdot 2\,\delta y\delta p + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\,\delta p^2\right\} + \int\left(\frac{\partial v}{\partial x}\,\delta x d\delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\,\delta y d\delta x\right).$$

Zur Abkürzung stelle ich ihn dar durch:

$$\int\left\{dx\left[\begin{matrix}F\delta x^2+2G\delta x\delta y+J\delta y^2\\ +2H\delta x\delta p+2K\delta y\delta p\\ +L\delta p^2\end{matrix}\right]+\frac{\delta v}{\delta x}\delta x d\delta x\right\}.$$
$$+\frac{\delta v}{\delta y}\delta y d\delta x$$

Nun ist wegen:

$$d\delta y=\delta p dx+p d\delta x$$

das Differential von

$$\alpha\delta x^2+2\beta\delta x\delta y+\gamma\delta y^2$$

gleich:

$$\begin{aligned}&d\alpha\delta x^2+2d\beta\delta x\delta y+d\gamma\delta y^2\\&+2\beta dx\delta x\delta p+2\gamma dx\delta y\delta p\\&+(2\alpha+2\beta p)\,\delta x d\delta x+(2\beta+2\gamma p)\,\delta y d\delta x.\end{aligned}$$

Fügen wir diese Grösse der unter dem Integralzeichen hinzu, und nehmen wir an, dass die Summe von der Form:

$$\int L dx(\delta p+\mu\delta y+\lambda\delta x)^2$$

sei, so wird der Werth von $\delta\int v dx$:

$$\begin{aligned}\delta\int v dx=&(\alpha\delta x^2+2\beta\delta x\delta y+\gamma\delta y^2)^0\\&-(\alpha\delta x^2+2\beta\delta x\delta y+\gamma\delta y^2)^I\\&+\int L dx(\delta p+\mu\delta y+\lambda\delta x)^2,\end{aligned}$$

und man hat zur Bestimmung von α, β, γ, μ, λ die Gleichungen:

$$\begin{aligned}L\mu&=K+\gamma,\\L\lambda&=H+\beta,\\L\mu^2&=J+\frac{d\gamma}{dx},\\L\mu\lambda&=G+\frac{d\beta}{dx},\\L\lambda^2&=F+\frac{d\alpha}{dx},\end{aligned}$$

$$\text{(e)}\quad\ldots\ldots\quad\begin{cases}\frac{\delta v}{\delta x}+2\beta p+2\alpha=0\\ \frac{\delta v}{\delta y}+2\gamma p+2\beta=0.\end{cases}$$

Die Anzahl dieser Gleichungen ist grösser als nötig ist, aber man sieht auch, dass zwei davon überflüssig sind und mit der durch die Variation erster Ordnung gegebenen Gleichung zusammenfallen.

Man wird übrigens bemerken, dass dieser Überfluss an Gleichungen auch bei der Variation erster Ordnung stattfindet, denn wenn man den Teil, welcher unter dem Integralzeichen steht, auf die Form $\int (P\delta x + Q\delta y)$ reducirt, erhält man die Gleichungen $P = 0$, $Q = 0$, welche alle beide auf die Gleichung (a) zurückkommen.

Beachten wir zunächst, dass man hat:

$$d\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 2Fdx + 2Gdy + 2Hdp,$$
$$d\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 2Gdx + 2Jdy + 2Kdp,$$
$$d\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right) = 2Hdx + 2Kdy + 2Ldp;$$

daher erhält man durch Differentiation der beiden Gleichungen (e):

$$F + Gp + H\frac{dp}{dx} + \frac{d\alpha}{dx} + p\frac{d\beta}{dx} + \beta\frac{dp}{dx} = 0,$$
$$G + Jp + K\frac{dp}{dx} + \frac{d\beta}{dx} + p\frac{d\gamma}{dx} + \gamma\frac{dp}{dx} = 0.$$

Mittelst der fünf anderen Gleichungen werden diese:

$$L\lambda^2 + L\mu\lambda p + L\lambda\frac{dp}{dx} = 0,$$
$$L\mu\lambda + L\mu^2 p + L\mu\frac{dp}{dx} = 0$$

und reduciren sich folglich auf die einzige Gleichung:

$$\frac{dp}{dx} + \mu p + \lambda = 0.$$

welche mit der Gleichung (d):

$$\frac{\partial v}{\partial y}dx - d\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right) = 0$$

übereinstimmt, da man durch Substitution der Werthe von $\frac{\delta v}{\delta y}$ und von $d\left(\frac{\delta v}{\delta p}\right)$:

$$\gamma p + \beta + H + Kp + L\frac{dp}{dx} = 0$$

oder

$$L\lambda + L\mu p + L\frac{dp}{dx} = 0$$

erhält.

Man sieht daher, dass die gefundenen sieben Gleichungen sich auf fünf zurückführen lassen, und die Ordnung, welche man behufs Bestimmung der Coëfficienten α, β, γ, μ, λ zu wählen hat, scheint diese zu sein:

$$\left(J + \frac{d\gamma}{dx}\right) L = (K + \gamma)^2,$$

$$\beta = -\gamma p - \tfrac{1}{2}\frac{\delta v}{\delta y},$$

$$\alpha = -\beta p - \tfrac{1}{2}\frac{\delta v}{\delta x},$$

$$\mu = \frac{K + \gamma}{L},$$

$$\lambda = \frac{H + \beta}{L}.$$

Der Werth von γ enthält eine willkürliche Constante, mittelst welcher man bewirken kann, dass der vom Integralzeichen befreite Theil:

$(\alpha\delta x^2 + 2\beta\delta x\delta y + \gamma\delta y^2)^0 - (\alpha\delta x^2 + 2\beta\delta x\delta y + \gamma\delta y^2)'$

gleich Null ist oder dasselbe Vorzeichen wie L hat.

Also wird die Gleichung (d) ein Maximum für das Integral $\int v dx$ ergeben, wenn der Coëfficient $\frac{\delta^2 v}{\delta p^2}$ negativ, und ein Minimum, wenn er positiv ist.

V.

Man wird jetzt muthmaassen, dass die Regel des Artikels III in allen Fällen statthaben muss. Ohne uns jedoch auf überflüssige Rechnungen und Allgemeinheiten einzulassen, begnügen wir uns, einen recht ausgedehnten Fall zu untersuchen, nämlich den, wo v eine Function von x, y, p und

einer Grösse φ ist, welche durch eine Differentialgleichung $d\varphi = \psi dx$ gegeben wird, in der ψ ebenfalls eine Function von x, y, p und φ bedeutet.

Wir nehmen $\delta x = 0$ an und erhalten als Werth von $\delta \int v\,dx$, die Glieder zweiter Ordnung mit inbegriffen:

$$\delta \int v\,dx = \int dx \left\{ \frac{\partial v}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial v}{\partial y}\delta y + \frac{\partial v}{\partial p}\delta p \right.$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}\delta\varphi^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial y}\,2\,\delta\varphi\delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial p}\,2\,\delta\varphi\delta p$$
$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\delta y^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial p}\,2\,\delta y\delta p + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\delta p^2 \right\}.$$

Ich schreibe ihn so:

$$\delta \int v\,dx = \int dx \left(A\delta\varphi + B\delta y + C\delta p + F\delta\varphi^2 + 2G\delta\varphi\delta y \right.$$
$$\left. + 2H\delta\varphi\delta p + I\delta y^2 + 2K\delta y\delta p + L\delta p^2 \right)$$

und ohne die Glieder erster Ordnung factorenweise zu integriren, mache ich sofort:

$$\int dx\,(A\delta\varphi + B\delta y + C\delta p) = \alpha\delta\varphi + \beta\delta y;$$

ich differentiire dann und setze an Stelle von $d\cdot\delta\varphi$ seinen Werth $dx\delta\psi$ oder:

$$dx\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\psi}{\partial p}\delta p\right),$$

den ich durch:

$$dx\,(A'\delta\varphi + B'\delta y + C'\delta p)$$

darstelle. Ich erhalte so:

$$\left(A - \alpha A' - \frac{d\alpha}{dx}\right)\delta\varphi + \left(B - \alpha B' - \frac{d\beta}{dx}\right)\delta y$$
$$+ (C - \alpha C' - \beta)\,\delta p = 0,$$

woraus die drei Gleichungen folgen:

$$A - \alpha A' - \frac{d\alpha}{dx} = 0,$$

$$B - \alpha B' - \frac{d\beta}{dx} = 0,$$

$$C - \alpha C' - \beta = 0.$$

Wenn man α und β aus diesen drei Gleichungen eliminirt, erhält man die gesuchte Relation zwischen den Variabeln x und y oder die Gleichung der Curve, in welcher $\int v\,dx$ Maximum oder Minimum ist. Man kann sofort β durch seinen Werth $C - \alpha C'$ eliminiren, und es bleibt nur noch übrig, α aus den beiden Gleichungen:

$$A - \alpha A' - \frac{d\alpha}{dx} = 0,$$
$$B - \alpha B' - \frac{d(C - \alpha C')}{dx} = 0$$

zu entfernen. Man erhält zu gleicher Zeit die bestimmte Gleichung:

$$(\alpha\delta\varphi + \beta\delta y)^0 - (\alpha\delta\varphi + \beta\delta y)' = 0,$$

welche sich auf $(\beta\delta y)^0 - (\beta\delta y)'$ reducirt; denn man muss das erste $\delta\varphi = 0$ und das letzte α oder $(\alpha)' = 0$ annehmen, damit in dem Theile ausserhalb des Integralzeichens kein unbestimmtes, von δy abhängiges Integral bleibt.

Zur Unterscheidung des Maximums und Minimums behandeln wir jetzt die Variation zweiter Ordnung wie gewöhnlich und setzen:

$$\int dx\{F\delta\varphi^2 + 2G\delta\varphi\delta y + 2H\delta\varphi\delta p + I\delta y^2 + 2K\delta y\delta p + L\delta p^2\}$$
$$= \vartheta\delta y^2 + 2\lambda\delta\varphi\delta y + \mu\delta\varphi^2 + \int L\,dx(\delta p + \zeta\delta y + \xi\delta\varphi)^2;$$

wenn wir differentiiren und die entsprechenden Glieder auf beiden Seiten einander gleich setzen, erhalten wir:

$$F = \frac{d\mu}{dx} + L\xi^2 + 2A'\mu,$$
$$G = \frac{d\lambda}{dx} + L\zeta\xi + A'\lambda + B'\mu,$$
$$H = \lambda + L\xi + C'\mu,$$
$$I = \frac{d\vartheta}{dx} + L\zeta^2 + 2B'\lambda,$$
$$K = \vartheta + L\zeta + C'\lambda.$$

Diese Gleichungen, ebenso viele an Zahl als die Unbekannten μ, ξ, λ, ζ, ϑ lassen sich nur schwierig auflösen und führen zu Differentialen dritter Ordnung. Es genügt aber ihre Möglichkeit einzusehen, und da man vermöge der willkürlichen

Constanten bewirken kann, dass die ganze Variation dasselbe Vorzeichen wie L hat, wird man darans sehliessen, dass das Integral $\int v\,dx$ ein Maximum ist, wenn $\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}$ negativ, und ein Minimnm, wenn es positiv ist.[13])

Anmerkung I. Soll die Grösse $\int v\,dx$ nnr unter der Bedingung ein Maximum oder ein Minimum sein, dass die nnbestimmten Integrale $\int v'dx$, $\int v''dx$, $\int v'''dx$ u. s. w. gegebene Werthe haben, dann muss man, indem α, β, γ n. s. w. willkürliehe Constanten bezeichnen, wie gewöhnlich, die Variation erster Ordnung von:

$$\int(v\,dx + \alpha v'dx + \beta v''dx + \gamma v'''dx + \cdots)$$

gleieh Null setzen; daranf hat man die Variation zweiter Ordnung zn nehmen; sie wird dieselbe wie die von $\int v\,dx$ sein, und ihr Vorzeichen wird angeben, ob man ein Maximum oder ein Minimnm erhalten hat. Siehe Beispiel II weiter hinten.

Anmerknng II. Wenn die Grösse $\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}$ des Artikels III nicht dasselbe Vorzeichen in der ganzen Ausdehnung der Cnrve hat, so wird ein Maximum und ein Minimum gleiehzeitig stattfinden. Man findet dafür ein Beispiel in dem folgenden Probleme.

VI.

Über den Körper des kleinsten Widerstandes.

Beispiel I. Die Curve zu finden, in welcher

$$\int \frac{y\,dy^3}{dx^2 + dy^2},$$

zwischen zwei gegebenen Punkten genommen, ein Minimum ist.

Das Problem ist niehts anderes als das des Körpers des kleinsten Widerstandes, welehes *Newton* zuerst in seinen Principien gelöst hat, und welehes seitdem von vielen anderen Geometern behandelt worden ist. Der Stoff ist nicht neu, doeh wird man sehen, dass noch einige Bemerkungen über die Natur des Problems und über die Art übrig bleiben, mit weleher die Rechnung ihm genügt.[14])

Setzt man $dy = p\,dx$, so wird die Grösse, welche ein Minimum sein soll, gleich

$$\int \frac{p^3 y}{1+p^2}\,dx,$$

und alle bekannten Methoden führen zu der Gleichung:

$$\frac{p^3 y}{(1+p^2)^2} = a,$$

aus welcher man erschliesst:

$$y = \frac{a\,(1+p^2)^2}{p^3}$$

$$x = a\left(\frac{3}{4p^4} + \frac{1}{p^2} + lp\right) + b.$$

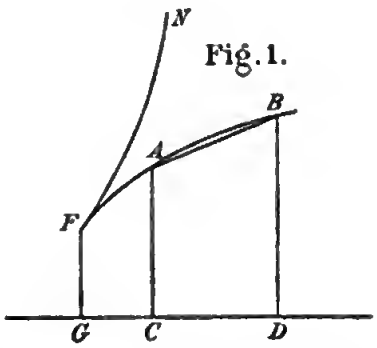


Fig. 1.

Vermöge dieser Gleichungen ist es leicht die Curve zu finden, sie besteht aus zwei Zweigen FB, FN, welche eine Spitze in F bilden, wo die gemeinschaftliche Tangente um 60° gegen die Axe GD geneigt ist. Diese Zweige erstrecken sich bis ins Unendliche; der erste, in welchem p von $\sqrt{3}$ bis Null abnimmt, hat zur Asymptote die Parabel:

$$y^4 = \frac{64}{27}\,a\,x^3;$$

der zweite, in welchem p von $\sqrt{3}$ bis ins Unendliche wächst, hat zur Asymptote die logarithmische Curve:

$$x - b = a\,l\frac{y}{a}.$$

Um nun zu wissen, ob man das Minimum, welches man verlangte, erhalten hat, wende man die Formel des Artikels I an. Man findet dann:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} = \frac{2py(3-p^2)}{(1+p^2)^2}.$$

Diese Grösse ist positiv in der ganzen Ausdehnung des Zweiges FB, wo man $p^2 < 3$ hat; sie ist dagegen negativ in dem andern Zweige FN, wo man $p^2 > 3$ hat; hieraus folgt, dass der erste allein ein Minimum ergiebt, und der zweite ein Maximum.

Geht man jetzt zu den Anwendungen über und fällt von den gegebenen Punkten A und B auf die Axe die Lothe AC, BD, so muss man verschiedene Fälle je nach der Natur des Trapezes $ABDC$ betrachten. Wenn der Winkel ABD grösser als 30° ist, so ist es möglich durch die Punkte A und B den parabolischen Zweig AB, nach seiner Asymptote benannt, hindurchgehen zu lassen. Wenn dieser Winkel kleiner als 30° ist, kann man den logarithmischen Zweig hindurchgehen lassen. Ist aber der Winkel genau gleich 30°, dann ist es nicht mehr möglich die Curve durch die beiden gegebenen Punkte hindurchgehen zu lassen und die vorhergehende Lösung wird illusorisch. Dasselbe gilt, wenn einer der gegebenen Punkte in die Axe CD selbst fällt.

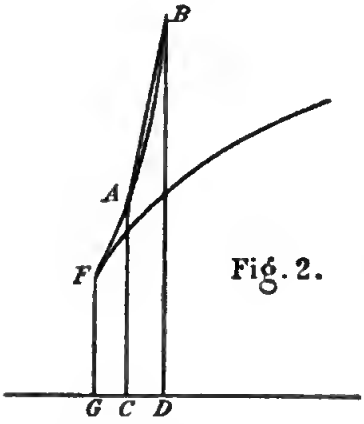


Fig. 2.

Es fehlt daher viel daran, dass die Lösung dieser Aufgabe, welche die Analysis darbietet, vollständig ist und in allen Fällen das Minimum, welches man suchte, giebt. In Wahrheit existirt für das Problem gar kein absolutes Minimum oder Maximum, und das Integral $\int \frac{y\,dy^3}{ds^2}$, zwischen zwei gegebenen Punkten genommen, kann so gross und so klein sein, als man will.

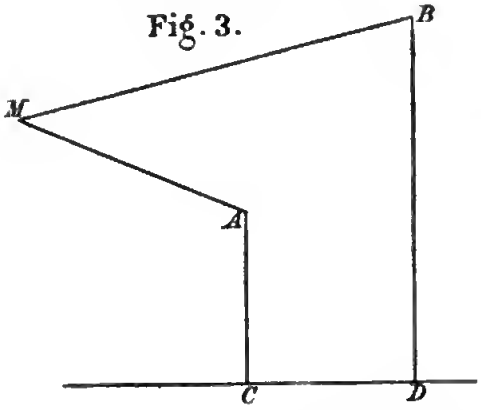


Fig. 3.

Ziehen wir durch die gegebenen Punkte A und B die gebrochene Linie AMB, und nehmen wir der Einfachheit wegen an, dass die beiden Theile AM und MB dieselbe Neigung J gegen die Axe CD haben, so wird der Werth von $\int \frac{y\,dy^3}{ds^2}$ in dieser Linie gleich $\frac{dy^2}{ds^2}\int y\,dy$ oder

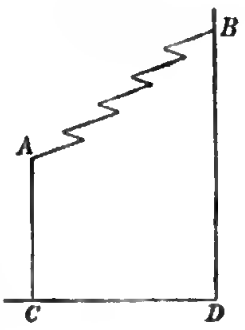
$$\frac{BD^2 - AC^2}{2} \sin^2 J$$

sein und kann also so klein angenommen werden, als man will. Wenn man aber verlangt, dass die Linie, welche die Punkte A und B verbindet, sich nicht jenseits der Abscisse CD ausdehnt, so könnte man eine Art Zickzack AB zeichnen, dessen Seiten stets die Neigung J gegen die Axe CD hätten. Das Integral $\int \frac{y dy^3}{ds^2}$ würde auch dann noch als Werth

$$\frac{BD^2 - AC^2}{2} \sin^2 J$$

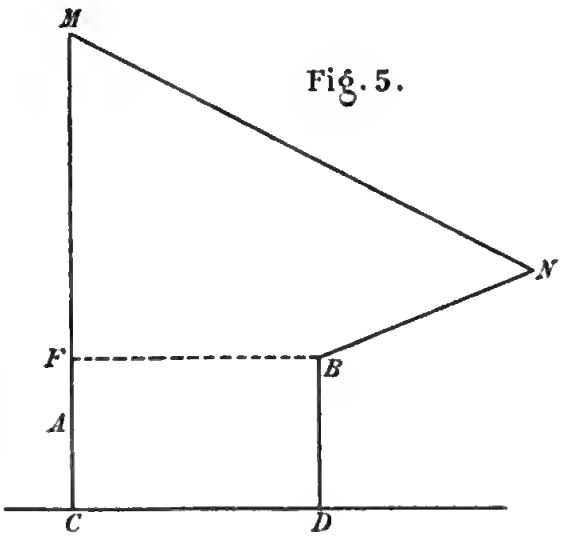
haben. Schliesslich kann man sich an Stelle der unstetigen Linien stetige Curven denken, welche der Gestalt des Zickzacks ähnlich sind und in denen daher $\int \frac{y dy^3}{ds^2}$ unter jede gegebene Grösse sinkt.

Fig. 4.



Es giebt ebensowenig ein absolutes Maximum, denn wenn man die Punkte A und B durch die Linie $AMNB$ verbindet, deren einer Theil AM unbestimmt aufsteigt und deren anderer Theil MNB einen sehr spitzen Winkel mit der Axe CD macht, so wird die Grösse $\int \frac{y dy^3}{ds^2}$, welche positiv im ersten Theil und negativ im zweiten ist, so gross als man es wünscht. Wenn sich die Linie nicht über den Punkt B erheben soll, würde die gebrocheneLinie AFB den grössten Werth für $\int \frac{y dy^3}{ds^2}$ geben, nämlich $\frac{BD^2 - AC^2}{2}$.

Fig. 5.



Es ergiebt sich hierans, dass die Minima nnd Maxima, welche in einigen besonderen Fällen unseres Problems erhalten wurden, nur relativ oder zufällig sind.[15])

Aber man erkennt leicht, dass das Integral $\int \frac{y dy^3}{ds^2}$ eines absoluten Maximums oder Minimums fähig wird, wenn man beispielsweise die Länge der Curve festsetzt. Man erhält so die Gleichung:

$$y = \frac{(1+p^2)^2}{p^3} \cdot \left[\frac{a}{\sqrt{(1+p^2)}} + b \right],$$

und kann, indem man sich auf einen besonderen Fall beschränkt, $b = 0$ setzen. Die nach der Gleichung:

$$y = \frac{a\,(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^3}$$

construirte Curve geht dann immer durch die beiden gegebenen Punkte hindurch. Sie wird ein absolutes Minimum für die Formel $\int \frac{y dy^3}{ds^2}$ geben, zwar nicht unter allen möglichen Curven, welche sich durch die beiden gegebenen Punkte ziehen lassen, wohl aber unter denen, welche von gleicher Länge sind.

Die Curve hat den Vorzug in allen Fällen zu genügen, aber sie wird nicht einen ebenso kleinen Werth von $\int \frac{y dy^3}{ds^2}$ ergeben als die bekannte Curve

$$y = \frac{a\,(1+p^2)^2}{p^3},$$

soweit sie der Aufgabe Genüge leistet.

VII.

Über die Kettenlinie.

Beispiel II. Unter allen Curven derselben Länge, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, diejenige zu bestimmen, in welcher $\int y\,ds$ ein Maximum ist.[16])

Man muss die Variation von

$$\int (y + a)\, ds$$

gleich Null setzen; a ist eine willkürliche Constante, welche

man durch die Bedingungen des Problems zu bestimmen hat. Man findet auf dem gewöhnlichen Wege die Gleichung:

$$d\left[\frac{(y+a)\,dy}{ds}\right] = ds,$$

die integrirt und separirt

$$dx = \frac{\pm b\,dy}{\sqrt{[(y+a)^2 - b^2]}}$$

ergiebt, und nach den oben erwähnten Formeln wird man ein Maximum haben, wenn $y + a$ negativ, ein Minimum, wenn es positiv ist.

Nun giebt die Gleichung

$$d\left[\frac{y+a)\,dy}{ds}\right] = ds,$$

wo das Vorzeichen unzweideutig bestimmt ist, den Krümmungsradius:

$$= -(y+a)\sqrt{1+p^2}).$$

Wenn also die Curve concav in Bezug auf ihre Axe ist, was bei der gewöhnlichen Kettenlinie stattfindet, so ist die Grösse $y + a$ negativ, das heisst, die Constante a ist negativ und grösser als y; also findet ein Maximum für die Grösse $\int(y+a)\,ds$ oder auch für $\int y\,ds$ statt, da $\int ds$ constant ist.

Hat umgekehrt der Scheitel der Curve die andere Richtung, so ist der Krümmungsradius negativ, und der Schwerpunkt weniger tief als möglich. Es ist in der That klar, dass man zwischen zwei gegebenen Punkten eine Kettenlinie von gegebener Länge in zwei verschiedenen Richtungen beschreiben kann: in der einen wird der Schwerpunkt am tiefsten sein, es ist der Fall bei der gewöhnlichen Kettenlinie; im anderen Falle wird er am höchsten sein, es ist der Fall bei Kügelchen, welche in einem Bogen angeordnet sind und sich durch ihr eigenes Gewicht aufrecht erhalten.

Wenn die Constante gleich Null ist, kommt die Länge nicht mehr in Frage, und daher genügt die Gleichung $d\left(\frac{y\,dy}{ds}\right) = ds$, wenn man unter allen Curven, die nur der Bedingung unterworfen sind durch zwei gegebene Punkte zu gehen, diejenige verlangt, in der $\int y\,ds$ ein Maximum oder

ein Minimum ist. Diese Curve wird immer noch die durch die Gleichung:

$$dx = \frac{\pm b\,dy}{\sqrt{(y^2 - b^2)}}$$

dargestellte Kettenlinie sein; sie ist convex in Bezug auf die Abscissenaxe, und es findet nur ein Minimum statt, da $y + a$ gleich y, folglich positiv ist.

Ich bemerke im Vorübergehen, dass die Gestalt einer Saite, welche auf einer gegebenen Oberfläche liegt nnd die von einer Kraft angegriffen wird, einer ähnlichen Eigenschaft des Maximums oder Minimums fähig ist. Es seien $dz = A\,dx + B\,dy$ die Gleichung der Oberfläche nnd X, Y, Z die Kräfte, welche jeden Punkt der Saite parallel den Coordinaten x, y, z angreifen. Wenn diese Kräfte so beschaffen sind, dass $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ ein vollständiges Differential ist, welches ich dP nenne, so ist die Grösse $\int (P + a)\,ds$ ein Maximum oder ein Minimum. Man findet durch diese Bedingung als Gleichnng der Curve:

$$ds\,(Y + BZ) = d\left(\frac{P\,dy}{ds}\right) + B\,d\left(\frac{P\,dz}{ds}\right),$$

womit man die Gleichung der Oberfläche combiniren muss.

Wenn die Grösse $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ kein vollständiges Differential wäre, so würde zwar diese Gleichung immer noch statt haben, das Integral $\int P\,ds$ würde aber nicht mehr ein Maximum oder Minimum sein.

VIII.

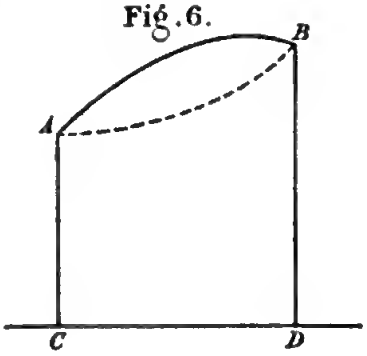
Über den Kreis.

Beispiel III. Gegeben seien die Abscisse CD, die beiden Ordinaten AC, BD nnd die Länge der Curve AMB. Wenn dann die Fläche $ABCD$ ein Maximum oder ein Minimnm ist, so findet man, dass die Curve AMB ein concaver oder convexer Kreisbogen in Bezng auf die Axe CD sein muss, je nachdem ein Maximum oder ein Minimum verlangt wird.

So ist die gewöhnliche Lösung dieses Problems, und die obenstehenden Formeln bestätigen die Existenz des Maximums

oder des Minimums in beiden Fällen. Wenn man aber verlangt, dass die Fläche $ABCD$ ganz zwischen den beiden Parallelen AC, BD liegen soll, so wird der Kreisbogen, welcher durch die Punkte A und B geht, nicht immer der Aufgabe genügen, da ein Theil des Bogens ausserhalb der Abscisse CD fallen könnte.

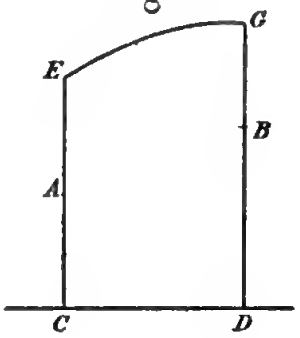
Fig. 6.



Um die wahre Lösung in allen Fällen zu haben, nehmen wir an, dass die Linie, welche Genüge leistet, $AEGB$ ist, und nennen die Endordinaten $CE = f$, $DG = g$. Da die Länge der Curve gegeben ist, erhält man:

$$\delta f + \delta g + \delta \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = 0.$$

Fig. 7.



Andererseits hat man, wenn die Fläche $\int y\,dx$ ein Maximum ist:

$$\delta \int y\,dx = 0,$$

nimmt man also $\delta x = 0$ an und führt die willkürliche Constante c ein, so erhält man:

$$0 = \delta f + \delta g + \int \left[\frac{dy}{ds}\, d\delta y + \frac{dx}{c}\, \delta y\right].$$

Nun ist:

$$\int \frac{dy}{ds}\, d\delta y = \frac{dy}{ds}\, \delta y - \int \delta y\, d\left(\frac{dy}{ds}\right);$$

also erhält man, wenn mit $\left(\frac{dy}{ds}\right)^0$ und $\left(\frac{dy}{ds}\right)'$ die Werthe von $\frac{dy}{ds}$ in E und G bezeichnet werden:

$$0 = \delta f\left[1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^0\right] + \delta g\left[1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)'\right] - \int \delta y\left[d\left(\frac{dy}{ds}\right) - \frac{dx}{c}\right],$$

woraus die drei Gleichungen hervorgehen:

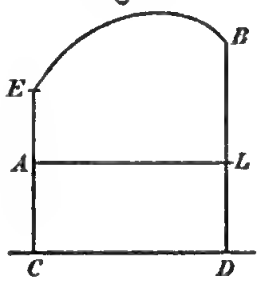
$$1) \ldots\ldots \quad d\left(\frac{dy}{ds}\right) - \frac{dx}{c} = 0,$$

$$2) \ldots\ldots \quad \delta f\left[1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^{\circ}\right] = 0,$$

$$3) \ldots\ldots \quad \delta g\left[1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^{\prime}\right] = 0.$$

Die Gleichnng 1) giebt immer noch einen Kreis für die Curve EG; was die beiden anderen betrifft, so können sie auf mehrere Arten stattfinden.

Fig. 8.



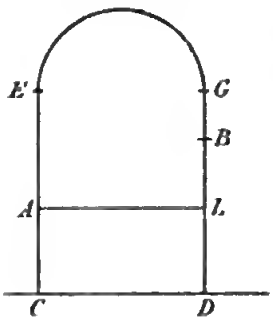
1) Wenn der Kreisbogen durch die beiden Punkte A und B gehen kann, ohne aus dem Raum zwischen den beiden Parallelen AC, BD herauszntreten, so werden f und g constant sein, nnd man hat:

$$\delta f = 0, \qquad \delta g = 0,$$

wodnrch man den Gleichungen 2) nnd 3) genügt.

2) Wenn der Kreisbogen nur durch den Punkt B gehen darf, findet die Gleichung 3) statt: um aber der Gleichung 2) zn genügen, muss man $\left(\frac{dy}{ds}\right)^{\circ} = 1$ setzen; also wird dann der Kreisbogen in E die Ordinate EC berühren.

Fig. 9.



3) Wenn der Kreisbogen der Gleichung 1) dnrch keinen der Pnnkte A und B gehen kann, ohne den Raum zwischen den Parallelen zu verlassen, dann sind weder f noch g constant; und um den Gleichungen 2) und 3) zn genügen, mnss man zu gleicher Zeit $\left(\frac{dy}{ds}\right)^{\circ} = 1$, uud $\left(\frac{dy}{ds}\right)^{\prime} = -1$ annehmen; daher berührt der Bogen EG die beiden Ordinaten EC, GD und ist folglich eine halbe Kreislinie.

Die Grenzen dieser verschiedenen Fälle sind leicht aufzustellen.

Es sei die gegebene Länge von A nach B gleich l, $BL = m$, $AL = n$. Dann findet der erste Fall statt, wenn man:

$$l < \frac{m^2 + n^2}{n} \operatorname{arctang} \frac{n}{m}$$

annimmt; der zweite, wenn man:

$$\frac{m^2 + n^2}{n} \operatorname{arctang} \frac{n}{m} < l < m + n\frac{\pi}{2};$$

der dritte, wenn man:

$$l > m + n\frac{\pi}{2}$$

hat, wo π der halbe Umfang des Kreises vom Radius 1 ist.

Nennen wir in allen Fällen r den Radius des zu beschreibenden Bogens und φ den entsprechenden Bogen des Kreises vom Radius 1, dann wird man im ersten Falle erhalten:

$$r\varphi = l,$$

$$2r \sin \tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{m^2 + n^2};$$

also:

$$\frac{\frac{1}{2}\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi} = \frac{l}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Im zweiten Falle sei noch $AE = z$, dann hat man, um r, φ, z zu bestimmen, die drei Gleichungen:

$$z + r\varphi = l,$$
$$z + r \sin \varphi = m,$$
$$r(1 - \cos \varphi) = n;$$

woraus hervorgeht:

$$\frac{\varphi - \sin \varphi}{1 - \cos \varphi} = \frac{l - m}{m - n}.$$

Endlich sei im dritten Falle noch $BG = u$, der gesuchte Bogen wird die halbe Kreislinie, deren Durchmesser $= n$ ist, und es bleibt nur übrig u und z zu finden, welche durch die Gleichungen:

$$z - u = m,$$

$$z + u = l - \frac{\pi n}{2}$$

bestimmt werden.

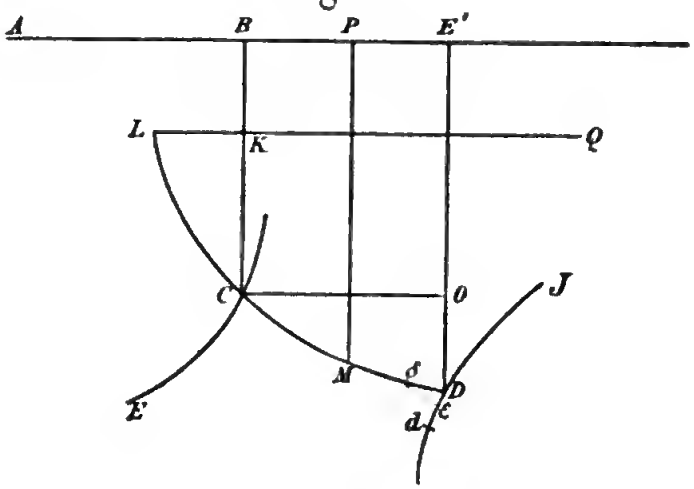
Die Formeln für das Minimum der Fläche sind genau dieselben, nur muss der Kreisbogen in Bezug auf die Axe CD concav sein, und die Punkte F und G müssen in entgegengesetztem Sinne gewählt werden.

IX.

Über die Cycloide.

Beispiel IV. Sind zwei Curven CE, DJ in einer verticalen Ebene gegeben und sucht man eine dritte Curve CD, auf welcher ein schwerer Körper von einer zur anderen in

Fig. 10.



möglichst kurzer Zeit herabfallen kann, so ergiebt sich, dass diese Curve eine Cycloide mit horizontaler Basis ist.

Die Endpunkte C und D müssen verschieden bestimmt werden je nach den Hypothesen, die man über die Anfangsgeschwindigkeit machen kann. Wenn die Geschwindigkeit im Anfangspunkte C von der Höhe CB der Ordinate der Curve CE abhängt, so müssen die beiden Curven CE und DJ von der Cycloide CD unter rechten Winkeln geschnitten werden. Wenn aber die Geschwindigkeit im Anfangspunkte C constant oder gleich Null sein soll, wird nur die Curve DJ unter

rechtem Winkel geschnitten, und die Tangenten der Curve CE und DJ in den Endpunkten C und D sind parallel.

Der erste Fall macht keine Schwierigkeit, und die Existenz des Minimums erschliesst man sogleich aus den obenstehenden Formeln. Anders ist es beim zweiten Falle, wo die Anfangsgeschwindigkeit gegeben ist; dann muss man den Einfluss der Variation des ersten Punktes auf das ganze Integral betrachten, was eine besondere Rechnung erfordert. Herr *Chevalier de Borda**) hat zuerst den Unterschied der beiden Fälle bemerkt und die wahre Lösung des zweiten gegeben, welche darauf Herr *de la Grange***) aus seinen Formeln erschlossen hat, indem er ihnen die nöthige Ausdehnung gab. Man wird es vielleicht nicht ungern sehen, wenn man hier dieselbe Behauptung in beinahe synthetischer und sehr einfacher Weise bewiesen findet.

Wenn die Anfangsgeschwindigkeit von der gegebenen Höhe h herrührt, die gleich Null werden kann, so hat man zweierlei zu beweisen: 1) dass die Curve DJ unter rechtem Winkel von der Cycloide geschnitten wird, 2) dass die Tangenten der Curven CE und DJ in C und D parallel sind.

Der erste Theil hat keine Schwierigkeit, da man das letzte Element δD, wenn es nicht senkrecht auf der Curve DJ wäre, durch ein Element $\delta\varepsilon$ senkrecht zur Curve ersetzen könnte, welches in kürzerer Zeit durchlaufen werden würde.

Um den zweiten Teil zu beweisen, sei:

$$\begin{aligned} AB &= X, & CO &= BE' = x, \\ BC &= Y, & OD &= y, \\ AE' &= X', & E'D &= Y'; \end{aligned}$$

man erhält:

$$X' = X + x \text{ und } Y' = Y + y,$$

und wenn die Punkte C und D in c und d übergehen, hat man, indem die analogen Differentiale für diese Bewegung mit der Charakteristik δ bezeichnet werden:

$$\delta X' = \delta X + \delta x \text{ und } \delta Y' = \delta Y' + \delta y.$$

Nun soll die Zeit auf CD ein Minimum und die Höhe, von welcher die Geschwindigkeit in C herrührt, der Ordinate

*) Mémoires de l'Académie 1768.
**) Mémoires de Turin, T. IV.

CK der Cycloide gleich sein, deren Basis LQ ist; vermöge dieser beiden Bedingungen lassen die Werthe von δx und δy sich durch δa ausdrücken, wo a der Durchmesser des erzeugenden Kreises ist. Man kann daher setzen:

$$\delta x = \mu \delta a, \qquad \delta y = \nu \delta a,$$

woraus sich ergiebt:

$$\frac{\delta X' - \delta X}{\delta Y' - \delta Y} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Das Verhältniss $\frac{\delta X}{\delta Y}$ ist für die Curve CE bekannt, ebenso das Verhältniss $\frac{\delta X'}{\delta Y'}$ für die Curve DJ, es ist daher infolge der vorhergehenden Gleichung nöthig, dass die beiden Verhältnisse gleich sind, da $\delta X'$ und δX, ebenso $\delta Y'$ und δY von einander unabhängig sind, mithin sind die Tangenten in C und D parallel.

Wenn man den ersten Theil nicht als bewiesen annehmen will, muss man die Werthe von μ und ν berechnen. Es sei also wie oben LQ die Basis der Cycloide; a der Durchmesser des erzeugenden Kreises; $CK = h$, der Winkel $LCK = \psi$ und der Winkel $CDO = \varphi$. Dann erhält man nach der Natur dieser Curve:

$$h = \tfrac{1}{2} a (1 - \cos 2\psi),$$
$$y = \tfrac{1}{2} a (\cos 2\psi - \cos 2\varphi),$$
$$x = \tfrac{1}{2} a (2\varphi - \sin 2\varphi) - \tfrac{1}{2} a (2\psi - \sin 2\psi);$$

und es wird die Zeit auf CD:

$$\int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{y}} = (\varphi - \psi)\, 2\sqrt{a}.$$

Da diese Zeit ein Minimum ist, so ergiebt sich:

$$\delta (\varphi - \psi) \sqrt{a} = 0;$$

andrerseits folgt aus dem Werthe von h:

$$\delta (a \sin^2 \psi) = 0.$$

Entnimmt man aus diesen beiden Gleichungen die Werthe von

$\delta\varphi$ und $\delta\psi$, so wird man sie in denjenigen von δy und δx substituiren, was:

$$\delta y = \delta a \sin\varphi \cos\varphi (\text{tang}\,\varphi - \varphi + \psi - \text{tang}\,\psi),$$
$$\delta x = -\delta a \cos^2\varphi (\text{tang}\,\varphi - \varphi + \psi - \text{tang}\,\psi)$$

ergiebt. Hieraus erschliesst man:

$$\frac{\delta X' - \delta X}{\delta Y' - \delta Y} = \frac{\delta x}{\delta y} = -\cot\varphi,$$

folglich ist:

$$\frac{\delta X'}{\delta Y'} = \frac{\delta X}{\delta Y} = -\cot\varphi,$$

was beide Theile unserer Behauptung einschliesst.

Um uns jetzt der Existenz des Minimums zu versichern, wollen wir die Frage in rein analytischer Weise betrachten. Es sei die erste Ordinate

$$CB = c, \quad AP = x, \quad PM = y,$$

die Höhe, von welcher die Geschwindigkeit in C herrührt, $= h$. Die Zeit des Durchlaufens vom Bogen CD ist

$$\int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{h + y} - \sqrt{c}}$$

oder einfach

$$\int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{y} - \sqrt{c}},$$

weil man y an Stelle von $h + y$ setzen kann; aber dann wird c der Anfangswerth von $y - h$ und nicht der von y.

Die Grösse c, welche sich in dieser Formel findet, und deren Variation das ganze Integral beeinflusst, bewirkt, dass die oben angeführten Formeln nicht anwendbar sind. Wir hätten allgemeine Formeln für alle ähnlichen Fälle aufstellen können, aber es genügt diesen besonderen Fall zu betrachten, der noch genug Schwierigkeiten bietet. Man wird sehen, dass das Resultat immer der allgemeinen Regel des Artikels III gemäss ist.

Zur Abkürzung sei:

$$\delta x = \alpha, \quad \delta y = \beta, \quad \delta c = \gamma, \quad dy = p\,dx,$$

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = ds, \qquad \frac{ds}{\sqrt{y-c}} = dt.$$

Die Variation von $\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{y-c}}$, die Glieder zweiter Ordnung inbegriffen, ist:

$$\frac{dxdt}{ds^2}(d\alpha + pd\beta) + \frac{dx^2dt}{2ds^4}(d\beta - pd\alpha)^2$$
$$+ \frac{dt(\gamma-\beta)}{2(y-c)} + \frac{dxdt}{2ds^2}(d\alpha + pd\beta)\left(\frac{\gamma-\beta}{y-c}\right)$$
$$+ \frac{3dt}{8}\left(\frac{\gamma-\beta}{y-c}\right)^2.$$

Entwickelt man den Theil erster Ordnung, so ergiebt sich die Gleichung der Cycloide:

$$\frac{ds\sqrt{y-c}}{dx} = \sqrt{a}.$$

Man erhält ferner zwei bestimmte Gleichungen, welche für die Endpunkte der Curve dieselben Bedingungen wie oben ergeben.

Es bleibt übrig, den Theil zweiter Ordnung zu entwickeln:

$$\int\left[\frac{dx^4dt}{2ds^4}\left(\frac{d\beta - pd\alpha}{dx}\right)^2\right.$$
$$\left.+ \frac{dx^2dt}{2ds^2}\left(\frac{d\alpha + pd\beta}{dx}\right)\left(\frac{\gamma-\beta}{y-c}\right) + \frac{3dt}{8}\left(\frac{\gamma-\beta}{y-c}\right)^2\right]$$

und zu zeigen, dass er sich immer auf eine positive Grösse reducirt. Nehmen wir an, diese Grösse sei, factorenweise integrirt, dem Ausdrucke gleich:

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + 2C\alpha\gamma + D\beta^2 + 2E\beta\gamma + F\gamma^2$$
$$+ \int\frac{dx^4dt}{2ds^4}\left(\frac{d\beta - pd\alpha}{dx} + P\alpha + Q\beta + R\gamma\right)^2.$$

Wenn man auf beiden Seiten differentiirt, die ähnlichen Glieder gleich setzt und der Kürze wegen $\frac{dx^3dt}{2ds^4}$ mit π bezeichnet, so erhält man die zwölf Gleichungen:

$$1)\quad \frac{dA}{dx} + \pi P^2 = 0,$$

$$2)\quad \frac{dB}{dx} + \pi PQ = 0,$$

$$3)\quad \frac{dC}{dx} + \pi PR = 0,$$

$$4)\quad \frac{dD}{dx} + \pi Q^2 = \frac{3dt}{8dx\sqrt{(y-c)^2}},$$

$$5)\quad \frac{dE}{dx} + \pi QR = \frac{-3dt}{8dx\sqrt{(y-c)^2}}$$

$$6)\quad \frac{dF}{dx} + \pi R^2 = \frac{3dt}{8dx\sqrt{(y-c)^2}},$$

$$7)\quad A - \pi pP = 0,$$

$$8)\quad B + \pi P = 0,$$

$$9)\quad B - \pi pQ = \frac{-dxdt}{4ds^2(y-c)}$$

$$10)\quad C - \pi pR = \frac{dxdt}{4ds^2(y-c)},$$

$$11)\quad D + \pi Q = \frac{-pdxdt}{4ds^2(y-c)},$$

$$12)\quad E + \pi R = \frac{pdxdt}{4ds^2(y-c)},$$

Da man mehr Gleichungen als Unbekannte hat, müssen drei der Gleichnngen eine Folge der neun anderen sein, wenigstens wenn man die Relation zwischen den Veränderlichen, welche durch die Gleichung

$$d\left[\frac{ds\sqrt{y-c}}{dx}\right] = 0$$

gegeben ist, als erfüllt annimmt; es ist leicht dies auf verschiedene Arten zu erkennen. Man findet zum Beispiel, dass die Gleichung 9) eine Folge der Gleichnngen 1), 2), 7) und 8) ist; dass die Gleichung 4) eine Folge derselben Gleichungen und der Gleichung 11) ist; dass endlich die Gleichnng 5) in den Gleichungen 3), 8), 9), 10) und 12) enthalten ist.

Es bleiben also neun Gleichungen znr Bestimmung der nenn Unbekannten, A, B, C, D, E, F, P, Q, R. Man kann hierfür folgende Ordnung wählen:

$$(\alpha') \ldots \frac{dA}{A^2} + \frac{ds^3}{dy^2}\sqrt{y-c} = 0,$$

$$(\beta') \ldots\ldots Cdx + \frac{\pi p^2}{A}dC = \frac{dx^2dt}{4ds^2(y-c)^2},$$

$$P - \frac{A}{\pi p} = 0,$$

$$R - \frac{C}{\pi p} = \frac{-ds^2}{4pdx^2(y-c)},$$

$$B + \frac{A}{p} = 0,$$

$$E + \frac{C}{p} = \frac{dt}{4pdx(y-c)},$$

$$Qp + P = \frac{ds^2}{2dx^2(y-c)},$$

$$pD - \frac{A}{p} = \frac{-dt}{4dx\sqrt{(y-c)}},$$

$$(\gamma') \ldots\ldots dF + \pi R^2 dx = \frac{3dt}{8(y-c)^2}.$$

Die Gleichungen (α') und (β') führen zwei willkürliche Constanten ein, mittelst derer man bewirken kann, dass der Theil der Variation ausserhalb des Integralzeichens:

$$(A\delta x^2 + 2B\delta x\delta y + 2C\gamma dx + D\delta y^2 + 2E\gamma\delta y + F\gamma^2)^1$$
$$-(A\delta x^2 + 2B\delta x\delta y + 2C\gamma dx + D\delta y^2 + 2E\gamma\delta y + F\gamma^2)^0$$

positiv wird, woraus man schliesst, dass die Cycloide in der That das verlangte Minimum giebt.

Ich zweifle nicht, dass man zu diesem Resultate auf eine einfachere Weise gelangen kann, wenn man es aus einer allgemeinen Theorie ableitet, bei welcher die identischen Gleichungen deutlicher werden. Indess scheint sicher, dass die Zahl der unbekannten Coëfficienten, welchen Weg man auch nimmt, immer dieselbe sein wird, und dass daher die Aufgabe, Maxima und Minima zu unterscheiden, nicht ganz so leicht ist, wie sie im ersten Augenblicke aussieht.

Zur Theorie der Variations-Rechnung und der Differential-Gleichungen.

Von

Professor **C. G. J. Jacobi**

zu Königsberg in Preussen.

Aus Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 17, S. 68—82 (1837).

Es ist mir gelungen, eine grosse und wesentliche Lücke in der Variations-Rechnung auszufüllen. Bei den Problemen des Grössten und Kleinsten nämlich, welche von der Variations-Rechnung abhängen, kannte man keine allgemeine Regel, woran zu erkennen wäre, ob eine Lösung wirklich ein Grösstes oder Kleinstes giebt, oder keins von beiden. Man hatte zwar erkannt, dass die Kriterien hierfür davon abhängen, ob gewisse Systeme von Differentialgleichungen Integrale haben, die während des ganzen Intervalls, über den das Integral, welches ein Maximum oder Minimum werden soll, erstreckt wird, endlich bleiben. Aber man konnte diese Integrale selbst nicht finden und auf keine Weise sonst, ohne sie zu kennen, den Umstand, ob sie innerhalb der gegebenen Grenzen endlich bleiben oder nicht, erörtern. Ich habe aber bemerkt, dass diese Integrale immer von selber gegeben sind, wenn man die Differentialgleichungen des Problems integrirt hat, d. h. die Differentialgleichungen, die erfüllt werden müssen, damit die erste Variation verschwindet.

Hat man durch Integration dieser Differentialgleichungen die Ausdrücke der gesuchten Functionen erhalten, welche eine Anzahl willkürlicher Constanten enthalten werden, so geben ihre nach diesen willkürlichen Constanten genommenen partiellen Differentialquotienten die Integrale der neuen Differentialgleichungen, welche man zur Bestimmung der Kriterien des Grössten und Kleinsten zu integriren hat.

Es sei, um den einfachsten Fall zu betrachten, das vorgelegte Integral

$$\int f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx;$$

y wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d\,\frac{\partial f}{\partial y'}}{dx} = 0$$

bestimmt, wo y' für $\frac{dy}{dx}$ gesetzt ist. Der Ansdruck von y, wie er durch die Integration dieser Gleichungen gegeben wird, enthält zwei willkürliche Constanten, die ich a und b nennen will. Die zweite Variation wird, wenn $w = \delta y$, $w' = \frac{dw}{dx}$ ist,

$$\int \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} ww + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} ww' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} w'w'\right) dx$$

sein, wo für das Maximum oder Minimnm nöthig ist, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$ imner dasselbe Zeichen behält. Aber um die vollständigen Kriterien des Maximums oder Minimums zu haben, mnss man noch den vollständigen Ansdruck einer Function v kennen, welche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{dv}{dx}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} + v\right)^2$$

Genüge leistet; wie man dies in *Lagranges* Functioncntheorie oder in *Dirksens* Variations-Rechnung sehen kann. (Die Variations-Rechnung von *Ohm* ist in dieser Theorie nicht genau.) [17]

Diesen vollständigen Ausdrnck für v finde ich nun wie folgt. Es sei

$$u = \alpha\,\frac{\partial y}{\partial a} + \beta\,\frac{\partial y}{\partial b},$$

wo $\frac{\partial y}{\partial a}$, $\frac{\partial y}{\partial b}$ die partiellen Differentialqnotienten von y bedeuten, nach den willkürlichen Constanten a, b genommen,

die in y vorkommen, und α, β neue willkürliche Constanten sind, so wird

$$v = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} + \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \frac{du}{dx}\right)$$

der verlangte Ausdruck von v, welcher eine willkürliche Constante $\frac{\beta}{\alpha}$ enthält.[18])

Schwieriger ist der Fall, wo unter dem Integralzeichen Differentialquotienten höherer Ordnung als die erste vorkommen. Es sei

$$\int f(x, y, y', y'')\, dx$$

zu einem Maximum oder Minimum zu machen, wo wieder $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$, so wird y das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d \frac{\partial f}{\partial y'}}{dx} + \frac{d^2 \frac{\partial f}{\partial y''}}{dx^2} = 0,$$

welches vier willkürliche Constanten a, a_1, a_2, a_3 enthalten wird. Wenn wieder $\delta y = w$, $\delta y' = w'$, $\delta y'' = w''$, so wird die zweite Variation:

$$\int \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} ww + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} ww' + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y''} ww'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} w'w' + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y''} w'w'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y''^2} w''w''\right) dx.$$

Für das Maximum oder Minimum muss $\frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}$ immer dasselbe Zeichen haben. Um aber die vollständigen Kriterien zu haben, muss man folgendes System von Differentialgleichungen integriren, wie man aus *Lagranges* Theorie der Functionen ersehen kann:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} + \frac{dv_2}{dx} + 2v_1\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} + v + \frac{dv_1}{dx}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{dv}{dx}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y''} + v_1\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} + \frac{dv_2}{dx} + 2v_1\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y''} + v_2\right)^2.$$

Durch diese drei Differentialgleichungen erster Ordnung, welche einen ziemlich abschreckenden Anblick bieten, sind die drei Functionen v, v_1 und v_2 zu bestimmen, deren vollständiger Ausdruck drei willkürliche Constanten enthalten muss. Ich habe ihre allgemeinen Integrale, wie folgt, gefunden. Es sei

$$u = \alpha \frac{\partial y}{\partial a} + \alpha_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + \alpha_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + \alpha_3 \frac{\partial y}{\partial a_3},$$

$$u_1 = \beta \frac{\partial y}{\partial a} + \beta_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + \beta_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + \beta_3 \frac{\partial y}{\partial a_3},$$

oder es seien u, u_1 lineare Ausdrücke der partiellen Differentialquotienten von y, nach den willkürlichen Constanten, die es enthält, genommen. Die acht Constanten α, α_1, α_2, α_3, β, β_1, β_2, β_3 sind nicht ganz willkürlich zu nehmen, sondern es muss zwischen den sechs aus ihnen zusammengesetzten Grössen $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta$, $\alpha\beta_2 - \alpha_2\beta$, $\alpha\beta_3 - \alpha_3\beta$, $\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3$, $\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3$, $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ eine gewisse Bedingung stattfinden, in deren nähere Erörterung ich hier nicht eingehen will. Hiernach werden die allgemeinen Ausdrücke für v, v_1, v_2, die ich gefunden habe, folgende:

$$r_2 = -\frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y''} - \frac{\partial^2 f}{\partial y''^2} \cdot \frac{u\frac{d^2u_1}{dx^2} - u_1\frac{d^2u}{dx^2}}{u\frac{du_1}{dx} - u_1\frac{du}{dx}},$$

$$r_1 = -\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y''} + \frac{\partial^2 f}{\partial y''^2} \cdot \frac{\frac{du}{dx}\frac{d^2u_1}{dx^2} - \frac{du_1}{dx}\frac{d^2u}{dx^2}}{u\frac{du_1}{dx} - u_1\frac{du}{dx}},$$

$$v = -\frac{dv_1}{dx} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} - \frac{\partial^2 f}{\partial y''^2} \cdot \frac{\left(u\frac{d^2u_1}{dx^2} - u_1\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{du}{dx}\frac{d^2u_1}{dx^2} - \frac{du_1}{dx}\frac{d^2u}{dx^2}\right)}{\left(u\frac{du_1}{dx} - u_1\frac{du}{dx}\right)^2}.$$

Da zwischen den sechs Grössen $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta$ u. s. w. eine identische Gleichung stattfindet, ausserdem zwischen denselben noch eine Bedingung gegeben ist, und in den Ausdrücken von v, v_1, v_2 nur ihre Verhältnisse vorkommen, so vertreten sie die Stelle von drei willkürlichen Constanten, wie verlangt wurde.

Die allgemeine Theorie, wenn unter dem Integralzeichen die Differentialquotienten von y bis auf irgend eine Ordnung

vorkommen, wird ohne Schwierigkeit aus einer merkwürdigen Eigenschaft einer besonderen Klasse linearer Differentialgleichungen abgeleitet. Diese linearen Differentialgleichungen der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung haben die Form

$$0 = Ay \frac{d(A_1 y')}{dx} + \frac{d^2(A_2 y'')}{dx^2} + \frac{d^3(A_3 y''')}{dx^3} + \cdots + \frac{d^n(A_n y^{(n)})}{dx^n} = Y,$$

wo $y^{(m)} = \frac{d^m y}{dx^m}$ und A, A_1 etc. gegebene Functionen von x sind. Wenn y irgend ein Integral der Gleichung $Y = 0$ ist, und man setzt $u = ty$, so wird der Ausdruck, in welchem $u^{(m)} = \frac{d^m u}{dx^m}$,

$$y\left[Au + \frac{d(A_1 u')}{dx} + \frac{d^2(A_2 u'')}{dx^2} + \cdots + \frac{d^n(A_n u^{(n)})}{dx^n}\right] = yU$$

integrabel, d. h. man kann sein Integral angeben ohne t zu kennen, und dieses Integral hat wieder die Form von Y, nur dass n um 1 kleiner geworden; man hat nämlich:

$$\int yU dx = Bt' + \frac{d(B_1 t'')}{dx} + \frac{d^2(B_2 t''')}{dx^2} + \cdots + \frac{d^{n-1}(B_{n-1} t^{(n)})}{dx^{n-1}},$$

wo $t^{(m)} = \frac{d^m t}{dx^m}$ und die Functionen B sich aus u und den Functionen A und deren Ableitungen allgemein angeben lassen. Der Beweis dieses Satzes ist nicht ohne Schwierigkeit. Ich habe die allgemeinen Ausdrücke der Functionen B gefunden; doch genügt es für die vorgesetzte Anwendung, nur überhaupt zu beweisen, dass $\int yUdx$ die angegebene Form habe, ohne dass es nöthig ist, die Functionen B selber zu kennen.

Die Metaphysik der gefundenen Resultate, um mich eines französischen Ausdrucks zu bedienen, beruht ungefähr auf folgenden Betrachtungen. Man kann bekanntlich der ersten Variation die Form

$$\int V \delta y dx$$

geben, wo $V = 0$ die zu integrirende Gleichung ist. Die zweite Variation erhält hiernach die Form:

$$\int \delta V \delta y dx.$$

Soll die zweite Variation das Zeichen nicht ändern, so muss dieselbe nicht verschwinden können, oder die Gleichung $\delta V = 0$, welche in δy linear ist, darf kein Integral δy haben, welches die Bedingungen, denen nach der Natur des Problems δy unterworfen ist, erfüllt. Man sieht hieraus, dass die Gleichung $\delta V = 0$ bei dieser Untersuchung eine bedeutende Rolle spielt, und gewahrt in der That bald ihren Zusammenhang mit den für die Kriterien des Maximums oder Minimums zu integrirenden Differentialgleichungen. Ausserdem sieht man sogleich, dass ein Werth von δy, welcher die Differentialgleichung $\delta V = 0$ erfüllt, jeder partielle Differentialquotient von y ist, nach einer der willkürlichen Constanten genommen, die y als Integral der Gleichung $V = 0$ enthält. Man erhält daher den allgemeinen Ausdruck des Integrals δy der Differentialgleichung $\delta V = 0$, wenn man aus allen diesen partiellen Differentialquotienten von y einen linearen Ausdruck bildet. Die Gleichung $\delta V = 0$, deren sämmtliche Integrale man auf diese Weise kennt, lässt sich aber, wie man zeigen kann, auf die Form der obigen Gleichung $Y = 0$ bringen, wenn man in dieser δy für y schreibt, und vermittelst der angegebenen Eigenschaften dieser Art von Gleichungen gelingt es, die zweite Variation

$$\int \delta V \delta y \, dx$$

durch fortgesetzte partielle Integration in einen andern Ausdruck zu transformiren, der unter dem Integralzeichen ein vollständiges Quadrat enthält, welches eben die Transformation der zweiten Variation ist, die man hierbei zu erreichen strebt. Wenn z. B. das obige Integral

$$\int f(x, y, y', y'') dx$$

vorgelegt ist, und man die für diesen Fall angegebene Bedeutung von u und u_1 beibehält, so erhält δV die Form

$$\delta V = A \delta y + \frac{d(A_1 \delta y')}{dx} + \frac{d^2(A_2 \delta y'')}{dx^2},$$

und es wird $\delta V = 0$ für $\delta y = u$. Setzt man $\delta y = u \delta' y$, so erhält man nach dem obigen allgemeinen Satze:

$$\int \delta V \delta y \, dx = \int u \delta V \delta' y \, dx$$

$$= \left[B \delta' y' + \frac{d(B_1 \delta' y'')}{dx} \right] \delta' y - \int \left[B \delta' y' + \frac{d(B_1 \delta' y'')}{dx} \right] \delta' y' \, dx.$$

Setzt man nun das letzte Integral

$$= \int V_1 \delta' y' dx,$$

so wird die Gleichung $V_1 = 0$ erfüllt, wenn man:

$$\delta' y = \frac{u_1}{u}, \quad \text{also } \delta' y' = \frac{u u_1' - u_1 u'}{u^2}$$

setzt. Man kann daher dieselbe Methode fortsetzen, indem man:

$$\delta' y' = \frac{u u_1' - u_1 u'}{u^2} \cdot \delta'' y$$

setzt, wodurch nach demselben Satze

$$\int V_1 \delta' y' dx = \int V_1 \left(\frac{u u_1' - u_1 u'}{u^2} \right) \delta'' y dx$$

$$= C \delta'' y' \cdot \delta'' y - \int C (\delta'' y')^2 dx,$$

welches die letzte Transformation ist, in welcher die willkürliche Variation nur in einem Qnadrat nnter dem Integralzeichen vorkommt. Man sieht übrigens leicht, dass

$$B_1 = u^2 A_2, \quad C = \left(\frac{u u_1' - u_1 u'}{u^2} \right)^2 B_1,$$

und daher

$$C = \left(\frac{u u_1' - u_1 u'}{u^2} \right)^2 A_2.$$

Es ist ferner $A_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}$, so dass C immer dasselbe Zeichen wie $\frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}$ hat, welches für das Minimum immer positiv, für das Maximum immer negativ sein mnss. Man mnss bekanntlich nun noch untersuchen, ob $\delta'' y'$ zwischen den Grenzen der Integration nicht unendlich werden kann, wozu man durch die Kenntniss der Functionen u, u_1 in den Stand gesetzt ist, welche man kennt, so wie y gegeben oder das vollständige Integral der Gleichung $V = 0$.

Wenn die im Vorstehenden angedeutete Analysis ziemlich tiefe Speculationen der Integralrechnung erfordert, so werden doch die daraus abgeleiteten Kriterien, ob die Lösnng überhaupt ein Maximum oder ein Minimum giebt, sehr einfach.

Ich will den Fall betrachten, wo, wenn unter dem Integralzeichen y mit seinen Differentialquotienten bis zum n^{ten} vorkommt, die Grenzwerthe von y, y', ..., $y^{(n-1)}$, so wie die Grenzen selber gegeben sind. Setzt man in die $2n$ Integralgleichungen mit ihren $2n$ willkürlichen Constanten diese Grenzwerthe, so werden die willkürlichen Constanten bestimmt; aber weil hierzu die Anflösung von Gleichungen nöthig ist, gibt es in der Regel mehrere Arten dieser Bestimmnng, so dass man mehrere Curven erhält, welche denselben Grenzbedingungen und derselben Differentialgleichung Genüge leisten. Hat man eine von diesen gewählt, so betrachte man den einen Grenzpunkt als fest und gehe von ihm zu den folgenden Punkten auf der Curve über. Nimmt man einen dieser folgenden Punkte zum andern Grenzpnnkte, so wird es, nach dem eben Gesagten, sich ereignen können, dass man durch ihn nnd den ersten noch andere Curven legen kann, für welche in diesen beiden Grenzen y', y'', ..., $y^{(n-1)}$ dieselben Werthe haben, und welche der vorgelegten Differentialgleichung genügen. Sobald man nun, indem man auf der Curve fortschreitet, zu einem Punkt derselben gelangt, für welchen eine jener andern Curven mit ihr zusammenfällt, oder, wie man sich auch ausdrücken kann, ihr unendlich nahe kommt: so ist dieses die Grenze, bis zu welcher, oder über welche hinaus, man die Integration nicht ausdehnen darf, wenn ein Maximum oder Minimum stattfinden soll; wenn man aber das Integral nicht bis zu diesen Grenzen ausdehnt, so wird ein Maximum oder Minimum immer stattfinden, vorausgesetzt, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)2}}$ zwischen den Grenzen immer dasselbe Zeichen hat.[19])

Ich will, um dies an einem Beispiel deutlich zu machen, das Princip der kleinsten Wirkung bei der elliptischen Bewegung eines Planeten betrachten.

Das in dem Princip der kleinsten Wirkung betrachtete Integral kann nie ein Maximum werden, wie *Lagrange* geglaubt hat: es wird aber auch keineswegs immer ein Minimum, sondern es sind dazu bestimmte Einschränknngen für die Grenzen nöthig, welche durch die obige allgemeine Regel gegeben werden, widrigenfalls das Integral weder ein Maximnm noch ein Minimum wird. Es fange der Planet (Fig. 11) sich von a zu bewegen an, wo a zwischen dem Peri- nnd Aphelium liege; der andere Endpunkt sei b; wenn $2A$ die grosse Axe, f die Sonne ist, so erhält man bekanntlich den andern Brenn-

punkt der Ellipse als Durchschnitt zweier aus den Centren a und b mit den Radien $2A - af$, $2A - bf$ beschriebenen Kreise. Die beiden Durchschnittspunkte der Kreise geben zwei verschiedene Lösungen des Problems, welche nur dann in eine zusammenfallen können, wenn die Kreise sich berühren, d. h., wenn ab durch den andern Brennpunkt geht. Wenn man also von a durch den andern Brennpunkt der Ellipse f' die Sehne der Ellipse aa' zieht, so wird der gegebenen Regel zufolge der andere Grenzpunkt b zwischen a und a' liegen müssen, wenn die Ellipse das im Princip der kleinsten Wirknng betrachtete Integral wirklich zu einem Kleinsten machen soll. Fällt b in a', so kann die zweite Variation des Integrals zwar nicht negativ werden, aber 0, so dass die Änderung des Integrals von der dritten Ordnung und daher sowohl positiv als negativ werden kann. Fällt b über a' hinaus, so kann die zweite Variation auch selbst negativ werden. Wenn der Anfangspunkt a zwischen dem Aphelium und Perihelium liegt, so wird der äusserste Punkt a' durch die Sehne der Ellipse bestimmt, welche man von a durch die Sonne f zieht. Denn wenn a und a' (Fig. 12) die Grenzpunkte sind, so erhält man durch Drehung der Ellipse um afa' unendlich viele Lösungen des Problems. Wenn also der zweite Grenzpunkt im letzteren Falle über a' hinaus liegt, wird es eine Raumcurve zwischen den beiden gegebenen Grenzen geben, für welche $\int v\,ds$ kleiner wird als für die Ellipse.

Fig. 11.

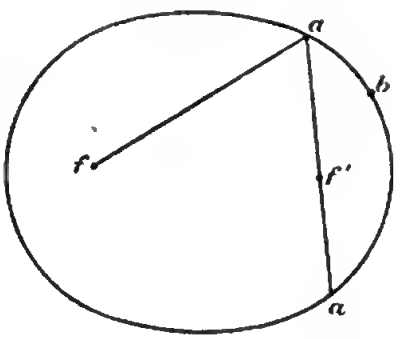
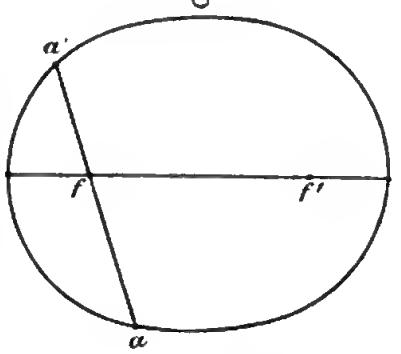


Fig. 12.



Ich will bei dieser Gelegenheit noch ein paar Worte über die Variation der Doppel-Integrale sagen, deren Theorie einer grössern Eleganz fähig ist, als sie selbst nach den Arbeiten von *Gauss* und *Poisson* erlangt hat.[20]) Um eine Vorstellung von der Art zu geben, wie es mir zweckmässig scheint, die

Variation der Doppel-Integrale auszudrücken, will ich den einfachsten Fall annehmen, in welchem

$$\delta \iint f(x, y, z, p, q)\, dx dy$$

betrachtet wird, wo

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Es sei w die Variation von z, so wird

$$\delta \iint dx dy f = \iint dx dy \left(\frac{\partial f}{\partial z} w + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

Die bei einfachen Integralen angewendete Methode besteht darin, den Ausdruck unter dem Integralzeichen in zwei Theile zu theilen, von denen der eine in w multiplicirt ist, der andere das Element eines Integrals ist; der erste muss unter dem Integralzeichen $= 0$ gesetzt werden, wenn die Variation verschwinden soll; die zweite kann integrirt werden, nnd man lässt sein Integral verschwinden. Eben so theile ich den Ausdruck unter dem Doppelzeichen in einen in w multiplicirten Theil und in einen anderen, der das Element eines Doppel-Integrals ist, das heisst, wenn $u = aw$, so setze ich:

$$\frac{\partial f}{\partial z} w + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} = Aw + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Vergleicht man die in w, $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ multiplicirten Terme, so erhält man:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = A + \frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = a \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = -a \frac{\partial v}{\partial x},$$

woraus

$$A = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right)}{\partial y}$$

folgt, welches, $= 0$ gesetzt, die bekannte partielle Differentialgleichung giebt, die hier auf eine vollkommen symmetrische Art abgeleitet ist. Die Function v muss die Gleichung erfüllen:

$$\frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Setzt man $A = 0$, so hat man:

$$\delta \iint dx dy f = \iint dx dy \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \iint dv du,$$

welches, in den gegebenen Grenzen genommen, verschwinden muss. Wenn z in den Grenzen gegeben ist, wird w und mithin auch $u = aw$ in den Grenzen verschwinden und daher

$$\iint du dv = 0$$

sein. Wenn die Grenzwerthe von z ganz willkürlich sind, so muss v in den Grenzen verschwinden, oder, wenn $v = 0$ die Grenzcurve bedeutet, so müssen die im Integral der Gleichung $A = 0$ vorkommenden willkürlichen Functionen so bestimmt werden, dass

$$\frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

ist, und so weiter.

Um auf das Maximum und Minimum zurückzukommen: so ist es ein Übelstand, dass im Gebrauch dieser Worte solche Verwirrung herrscht. Man sagt, ein Ausdruck sei ein Maximum oder Minimum, wenn man blos sagen will, dass seine Variation verschwindet, selbst wenn auch weder ein Maximum noch ein Minimum stattfindet. Man sagt, eine Grösse sei ein Maximum, wenn man nur sagen will, sie sei kein Minimum. So sagt *Poisson* in seiner Mechanik: bei geschlossenen Flächen könne die kürzeste Linie zwischen zwei gegebenen Punkten ein Maximum sei, obgleich es sich von selbst versteht, dass man durch Ausbiegungen, die unendlich klein sein können, einen noch so grossen Weg noch grösser machen kann. Freilich giebt die kürzeste Linie nur dann ein relatives Minimum, wenn die nach meiner obigen allgemeinen Regel gestellte Bedingung erfüllt ist, nämlich dass es

zwischen den beiden Endpunkten auf der Curve nicht zwei andere giebt, zwischen denen man noch eine zweite unendlich nahe kürzeste Curve ziehen kann. Im andern Falle ist aber die Länge kein Maximum, sondern weder ein Maximum noch ein Minimum. Für die Flächen, die in jedem Punkte zwei entgegengesetzte Krümmungen haben, habe ich bewiesen, dass zwischen je zweien ihrer Punkte die kürzeste Linie wirklich eine kürzeste Linie ist.[21])

Anmerkungen.

Mit *Lagrange* beginnt eine neue Epoche der Variations-Rechnung, welche dadurch charakterisirt ist, dass die wesentlich geometrische Methode der *Bernoulli* und *Euler* durch eine analytische Auffassung ersetzt und damit ein ähnlicher Fortschritt gemacht wurde, wie es der von *Newton*'s Fluxionen zu den *Leibniz*'schen Differentialen war. Aber *Lagrange* konnte nicht nur, vermöge seines neuen Algorithmus, der es erlaubte alle veränderlichen Grössen auf einmal zu variiren, die früher gestellten Aufgaben einfacher und zugleich strenger lösen, sondern es wurde ihm auch möglich das Gebiet der Variations-Rechnung erheblich zu erweitern, indem er einmal die Grenzen der Integrale ebenfalls als variabel ansah und dann auch die Doppelintegrale in den Kreis der Betrachtung zog.

Die erste seiner grundlegenden Abhandlungen findet sich im zweiten Bande der Miscellanea Taurinensia für 1760 und 1761; dieser Band besteht aus drei für sich numerirten Abtheilungen, auf S. 173—195 der dritten befindet sich der Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies. Der Band erschien erst 1762, und mit dieser Jahreszahl citirt *Lagrange* selbst seine Abhandlung, deren wesentliche Ergebnisse er freilich schon 1755 *Euler* brieflich mitgetheilt hatte.

Als Ergänzung und weitere Ausführung tritt ihr eine zweite Abhandlung zur Seite, welche im vierten Bande der Miscellanea Taurinensia für 1766 bis 1769 erschien. Dieser Band besteht aus zwei für sich numerirten Abtheilungen, auf S. 163—187 der zweiten findet man *Lagrange*'s Abhandlung: Sur la méthode des variations; er erschien erst Ende 1771. Dass *Lagrange*'s Abhandlung in das Jahr 1770 zu setzen ist, ergiebt sich aus ihrer Schlusszeile: Berlin, ce 28 mai

1770, welche bei dem Wiederabdruck in den Oeuvres weggelassen worden ist. Auch sonst weist der Abdruck der beiden Abhandlungen in den Oeuvres, t. I, S. 335—364 und t. II, S. 37—66 kleine Abweichungen vom Urtext auf; der hier mitgetheilten Übersetzung liegen die Originalabhandlungen zu Grunde.

Eine wesentliche Vervollständigung seiner Untersuchungen hat *Lagrange* in der Mécanique analytique (1788) gegeben, nämlich seine Methode der unbestimmten Multiplicatoren, welche es ermöglicht alle Probleme mit Nebenbedingungen auf solche ohne Nebenbedingungen zurückzuführen; eine strenge Begründung hat sie allerdings erst in neuerer Zeit durch *A. Mayer* gefunden (Math. Ann., Bd. 26, 1886).

Während in der Theorie der gewöhnlichen Maxima und Minima schon früh erkannt wurde, dass das Verschwinden des Differentialquotienten keine hinreichende Bedingung dafür ist, und Kriterien dafür aufgestellt wurden, wann wirklich ein Extremum stattfindet, ist die entsprechende Frage in der Variations-Rechnung erst verhältnissmässig spät gestellt worden. Sieht man von einem verfehlten Versuch ab, den *Laplace* 1770 machte (Nova Acta Erud. anni 1772, S. 293), so hat zuerst *Legendre* die Frage in Angriff genommen in seiner Abhandlung: Mémoire sur la manière de distingner les maxima des minima dans le calcul des variations (Mémoires de Math. et de Phys., année 1786, Paris 1788, S. 7—37), welche hier an dritter Stelle mitgetheilt wird.

Legendre täuschte sich freilich, wenn er seine Bedingung für hinreichend hielt, worauf *Lagrange* 1797 aufmerksam gemacht hat (vgl. Anm. 12). Die so entstandene Lücke in der Variations-Rechnung auszufüllen ist erst 1836 *Jacobi* auf Grund tiefliegender Untersuchungen geglückt. Kurze Angaben über seine Resultate machte er zuerst im 3. Bande der Comptes rendus und in den Monatsberichten der Berliner Akademie von 1836. Eine ausführlichere, aber immer noch recht knappe Darstellung enthält seine Abhandlung: Zur Theorie der Variations-Rechnung und der Differential-Gleichungen (Journal für Mathematik, Bd. 17, S. 68—82, 1837), von welcher hier der auf die Variations-Rechnung bezügliche Theil wortgetreu abgedruckt ist. Eine französische Übersetzung findet sich in Liouville's Journal, sér. I, t. III, ein Abdruck in *Jacobi*'s gesammelten Werken, Bd. IV, S. 37 bis 55.

An *Jacobi*'s Abhandlung hat sich eine zahlreiche Litteratur angeschlossen, über welche *Todhunter* (History of the calculus of variations, London 1861) berichtet hat; hier sei nur auf die beiden Commentare hingewiesen, welche *Delaunay* (Liouville's Journal, sér. I, t. VI, 1841) und *Hesse* (Journal für Mathematik, Bd. 54, 1857) gegeben haben.

---

1) *Zu S. 4.* Das erste hierher gehörige Problem ist das des Rotationskörpers kleinsten Widerstandes, welches *Newton* 1686 gestellt und auf eine Differentialgleichung zurückgeführt hat; *Lagrange* hat dies später selbst ausgesprochen (Oeuvres, t. X, S. 384). Das Problem der Brachistochrone wurde 1696 von *Joh. Bernoulli* gestellt; Lösungen gaben ausser ihm sein Bruder *Jakob*, *de l'Hôpital*, *Huygens*, *Leibniz* und *Newton* (Acta Erud. Mai 1697). Bei dieser Gelegenheit führte *Jak. Bernoulli* als Nebenbedingung ein, dass die Curvenlänge eine vorgeschriebene Grösse haben solle; seine Lösung dieses isoperimetrischen Problems erschien Acta Erud., Juni 1700. *Leonhard Euler* fasste endlich die Ergebnisse der Forschungen dieser ersten Periode der Variations-Rechnung in seiner klassischen Methodus inveniendi zusammen, welche 1744 erschien.

2) *Zu S. 11.* Gegen die Lösung von *Lagrange* hat *Borda* Bedenken erhoben, welche ihren Grund darin hatten, dass die Aufgabe nicht genau formulirt ist. Die Analogie mit dem ursprünglich von *Joh. Bernoulli* gestellten Probleme legte es nahe zu verlangen, dass die Bewegung des schweren Punktes in der ersten Grenzfläche mit der Geschwindigkeit Null beginnt. Das ist jedoch nicht die von *Lagrange* gelöste Aufgabe, denn aus seiner Integralformel:

$$\int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{x}}$$

folgt, dass die Geschwindigkeit des schweren Punktes stets proportional $\sqrt{x}$ ist, sodass die Anfangsgeschwindigkeit von der Tiefe der Stelle abhängt, an welcher die Cycloide die erste Grenzfläche trifft. In seiner zweiten Abhandlung (S. 51 dieses Bändchens) hat *Lagrange* die Aufgabe unter allgemeineren Voraussetzungen behandelt.

3) *Zu S. 18.* Sieht man die Gleichung:

$$d\delta Z + T\delta Z = n\delta x + p\delta dx + \cdots$$

als lineare Differentialgleichung erster Ordnung für δZ an, so ergiebt sich der im Text erwähnte Ansdruck für $\delta \int Z$. Soweit ist das Verfahren von *Lagrange* richtig, aber bei der Umformung dieses Ansdruckes entspricht der unendlich kleinen Grösse L des Art. IX nicht die endliche Grösse:

$$e^{-\int T},$$

sodass die weiteren Formeln einer Berichtigung bedürfen.

4) *Zu S. 23.* Eine nicht triviale Lösung seiner Differentialgleichung hätte *Lagrange* der Methodus inveniendi (Cap. V, § 44) entnehmen können; *Euler* zeigt dort, dass die Kettenlinie bei der Rotation um ihre Axe eine Minimalfläche erzeugt. Ein zweites Beispiel, die windschiefe Schraubenfläche, wurde 1776 von *Meusnier* (Mém. de Math. et de Phys., t. X, Paris 1785) gefunden, welcher auch entdeckte, dass die *Lagrange*'sche Differentialgleichung eine geometrische Bedeutnng besitzt, nämlich die Flächen von der mittleren Krümmung Null definirt. Eine vorzügliche Darstellung der in neuerer Zeit sehr ausgebildeten Theorie der Minimalflächen gab *Darboux* in seinen Leçons sur la théorie générale des surfaces (t. I, liv. III, Paris 1887).

5) *Zu S. 24.* *Lagrange* erwähnt dieses Problem bereits 1760 in einem Briefe an *Euler*, welcher in der Methodus (Cap. V, § 44) den besonderen Fall der Rotationsflächen behandelt hatte, die bei gegebener Oberfläche das grösste Volumen besitzen. Während über die Minimalflächen eine umfangreiche Litteratnr existirt, ist über die Flächen constanter mittlerer Krümmung noch sehr wenig bekannt.

6) *Zu S. 30.* Das Zeichen d bedeutet hier eine endliche Differenz, das Zeichen $\int$ eine endliche Summe.

Aufgaben der betrachteten Art finden sich schon im 5. Buche von *Pappos*: *Συναγωγαὶ μαθηματικαί.* Mit rein geometrischen Hilfsmitteln behandelten sie später *Lhuilier* (De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum, Varsaviae 1782), bei dem sich viele Angaben über die ältere Litteratur finden, und *Jakob Steiner* (Journal für Mathematik, Bd. 18, 1836 u. Bd. 24, 1841).

7) *Zu S. 32.* Der Briefwechsel zwischen *Euler* und *Lagrange* ist uns zum grössten Theile erhalten geblieben, man findet ihn in t. XIV der Oeuvres von *Lagrange*, Paris 1892. Die erwähnten Abhandlungen von *Euler* führen den Titel: Elementa calculi variationum und Analytica explicatio methodi maximorum et minimorum und stehen in t. X der Novi Commentarii ad 1764, Petersburg 1766. Weitere Arbeiten *Euler*'s enthält der dritte Band der Institutiones calculi integralis, Petersburg 1770 und t. XVI der Novi Comment. ad 1771, Petersburg 1772; letztere Abhandlung: Methodus nova ac facilis calculum variationum tractandi ist wieder abgedruckt im 4. Bande der Inst. calc. int., Petersburg 1794.

8) *Zu S. 32.* *Alexis Fontaine* (1705—1771) wurde von den Zeitgenossen mit *Clairaut* und *Condorcet* in eine Linie gestellt; seine Untersuchungen über Differentialgleichungen sind jetzt vergessen. *Lagrange*, der sonst jede Polemik vermied, machte hier eine Ausnahme, denn *Fontaine*'s Verfahren hatte ihn tief empört, vgl. seine Briefe an *Condorcet*, Oeuvres t. XIV. *Fontaine* hat übrigens die Entgegnung von *Lagrange* nicht mehr gelesen, da sie erst Ende 1771 erschien.

9) *Zu S. 34.* *François Jacquier* (1711—1788) war Professor der Mathematik in Rom, wo auch sein Ordensgenosse *Le-Seur* lebte. Ihr Lehrbuch: Éléments de calcul intégral erschien Parma 1768, 2 Bd. 4°. *Maupertuis* hatte in den Pariser Memoiren für 1744 das Princip der kleinsten Action in vager Form ausgesprochen, und *Euler* kurz darauf im zweiten Anhange zur Methodus inveniendi gezeigt, dass die Bewegung eines materiellen Punktes bei der Annahme von Centralkräften auf dieselbe Gleichung führt, welche man erhält, wenn man die Variation des Integrals der Geschwindigkeit mal dem Linienelemente der Trajectorie gleich Null setzt. Dass das Princip allgemein gelte, hatte *Euler* am Schluss ausdrücklich behauptet, ohne jedoch die betreffenden Rechnungen wirklich auszuführen. Dies hat erst *Lagrange* gethan in der Abhandlung: Application de la méthode exposée dans le Mémoire précédent à la solution de différents Problèmes de Dynamique, Misc. Taur., t. II, S. 195 bis 298, Oeuvres, t. I, S. 365—470. Später hat *Lagrange* das Princip der kleinsten Action aufgegeben und der Mécanique analytique (1788) das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten zu Grunde gelegt.

10) *Zu S. 51.* *Borda* (1733—1799), der bekannte Astronom und Geodät, stand später mit *Lagrange*, der sachliche Kritik stets anerkannte, in freundschaftlichem Verhältniss. Dass seine Einwendungen nicht unberechtigt waren, zeigt Anm. 2), indess ging er zu weit, wenn er deshalb *Lagrange*'s allgemeine Grenzbedingungen für unzureichend hielt.

11) *Zu S. 58.* Diese interessante Stelle beweist, dass die von *Jacobi* 1841 aufgestellte Regel über die Anwendung der Zeichen d und δ (Werke, Bd. III, S. 152) nur die Fixirung eines bereits bestehenden Gebrauches war.

12) *Zu S. 60.* Weder die Begründung noch das Ergebniss der Untersuchungen des Art. I können als streng und richtig gelten. *Legendre* selbst hat im folgenden Bande der Mémoires (Paris 1789, S. 348) zwei Einwände erhoben:

a) Der Schluss, dass:

$$\int \frac{\partial^2 v}{\partial q^2} (\delta q + \mu \delta p + \nu \delta y)^2 dx$$

das Vorzeichen von $\frac{\partial^2 v}{\partial q^2}$ besitzt, ist nur erlaubt, wenn man die Hilfsfunctionen α, β, γ in reeller Weise bestimmen kann. Dass dies aber immer möglich ist, bedarf eines Beweises, den *Legendre* durch Reihenentwickelungen nach dem *Taylor*'schen Satze zu geben versucht. Diese Begründung ist unzureichend, die Behauptung jedoch richtig, wie die neueren Sätze über die Existenz von Integralen der Differentialgleichungen zeigen.

b) Es wird ohne weiteres angenommen, man könne die willkürlichen Constanten in α, β, γ stets so bestimmen, dass der Ausdruck:

$$(\alpha \delta y^2 + 2\beta \delta y \delta p + \gamma \delta p^2)^0 - (\alpha \delta y^2 + 2\beta \delta y \delta p + \gamma \delta p^2)^1$$

verschwindet. *Legendre* versucht wieder einen Beweis durch Reihenentwickelungen, es ist jedoch ebenso wenig möglich, diese Behauptung zu beweisen als den Satz, dass jede transcendente Gleichung Wurzeln besitzt. Indess fällt diese Schwierigkeit fort, wenn man sich auf den Fall beschränkt, dass die Grenzen des Integrals fest sind.

Ein drittes, entscheidendes Bedenken hat *Lagrange* 1797 erhoben (Oeuvres t. IX, S. 303). Besitzt nämlich die Ableitung einer Function stets dasselbe Vorzeichen, so braucht für die Function nicht dasselbe zu gelten; z. B. ist $(1 - x)^{-2}$

für reelles x stets positiv, während das Integral davon $x:(1-x)$ für $x=0$ und $x=1$ das Vorzeichen wechselt. Das Theorem von *Legendre* gilt daher nur so lange, als der Ausdruck unter dem Integralzeichen endlich bleibt. Um dies zu entscheiden, muss man aber die Hilfsfunctionen α, β, γ wirklich herstellen, es genügt nicht bloss ihre Möglichkeit zu erkennen.

13) *Zu S. 70.* *Legendre*'s Resultat ist unrichtig, weil er bei der Umformung des Integrals nicht alle Glieder zweiter Ordnung berücksichtigt hat. Die Schuld daran trägt seine Bezeichnungsweise, nach welcher $\delta\varphi$ einmal eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung, dann die vollständige Variation von φ bedeutet.

Legendre setzt:

$$A\delta\varphi + B\delta y + C\delta p = \alpha\delta\psi + \beta\delta p,$$

wo δ die vollständige Variation bezeichnen soll. Nun entwickelt er den Ausdruck auf der rechten Seite und versteht unter $\delta\varphi$, δp, δy unendlich kleine Grössen erster Ordnung. Thut man das, so muss man im Ausdrucke rechts noch die aus $\delta\psi$ entspringenden Glieder zweiter Ordnung:

$$\tfrac{1}{2}F'\delta\varphi^2 + G'\delta\varphi\delta y + H'\delta\varphi\delta p + \tfrac{1}{2}J'\delta y^2 + K'\delta y\delta p + \tfrac{1}{2}L'\delta p^2$$

hinzufügen. In der weiteren Rechnung sind daher die Grössen $F, G, \ldots, L$, bzw. durch $F-\alpha F', G-\alpha G', \ldots, L-\alpha L'$ zu ersetzen, und im Schlussergebnisse muss es statt $\frac{\delta^2 v}{\delta p^2}$ heissen:

$$\frac{\delta^2 v}{\delta p^2} - \alpha\,\frac{\delta^2\psi}{\delta p^2}.$$

14) *Zu S. 70.* Das Verständniss dieses Artikels wird erleichtert, wenn man die Bemerkung beachtet, welche *Jacobi* (S. 97 dieses Bändchens) über den Gebrauch der Worte Maximum und Minimum macht.

15) *Zu S. 73.* Die ältere Geschichte dieses Problems findet man in Anm. 24 des vorhergehenden Bändchens. Vor *Legendre* sind noch zu nennen: *Bouguer* (Mémoires de Paris, année 1733), welcher das Problem verallgemeinerte, und *Saint-Jacques de Silvabelle* (Mém. prés. t. III, Paris 1760), welcher einen Theil von *Legendre's* Resultaten vorausgenommen hat. *Silvabelle* behauptet bereits, der concave Zweig gebe ein Minimum, der convexe ein Maximum des Widerstandes. Jedoch, fügt er hinzu, nur unter den regulären Curven,

denn das Minimum lasse sich verkleinern, das Maximum vergrössern, wenn man die Curve durch eine Zickzacklinie ersetzt.

Dass das Kriterium des Art. II hier versagt, woran *Legendre* merkwürdigerweise keinen Anstoss genommen hat, findet seine Erklärung in folgendem Umstande. Bei der Ableitung des Kriteriums wird stillschweigend vorausgesetzt, dass mit δx und δy auch δp unendlich klein ist, dass also nicht nur die Ordinate, sondern auch die Richtung der Tangente unendlich wenig geändert wird; bei der Zickzacklinie ist aber diese Voraussetzung nicht erfüllt.

An und für sich hat man jedoch keinen Grund, solche Variationen auszuschliessen; lässt man sie zu, so wird *Legendre*'s Kriterium auch mit *Jacobi*'s Ergänzung nur eine nothwendige, keine hinreichende Bedingung des Maximums oder Minimums; vgl. *Scheeffer*, Math. Ann. Bd. 25 u. 26, 1885.

Bei dem vorliegenden Probleme sind freilich, wie *F. August* (Journal für Mathematik, Bd. 103, 1888) bemerkt hat, jene unstetigen Variationen aus physikalischen Gründen zu verwerfen, weil die Annahme, dass der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, nur dann zutrifft, wenn jedes Flüssigkeitstheilchen nur einmal mit dem bewegten Körper zusammenstösst.

16) *Zu S. 74.* Schon *Galilei* beschäftigte sich mit der Kettenlinie, welche er irrthümlicherweise für eine Parabel hielt (Discorsi 1638, diese Sammlung Nr. 11, S. 123). Dann stellte *Jak. Bernoulli* das Problem (Acta Erud. Mai 1690); es wurde von ihm, seinem Bruder *Johann*, *Huygens* und *Leibniz* gelöst (Acta Erud., April 1692).

17) *Zu S. 88.* *Legendre*'s Name fehlt, was wohl darin seinen Grund hat, dass *Lagrange* (Oeuvres, t. X, S. 305) nur die Mémoires von 1786, nicht den Verfasser citirt.

Die erwähnten Lehrbücher sind: *Dirksen*, analytische Darstellung der Variationsrechnung und Anwendung derselben auf die Bestimmung des Grössten und Kleinsten, Berlin 1823, und *Martin Ohm*, die Lehre vom Grössten und Kleinsten, Berlin 1825.

18) *Zu S. 89.* *Jacobi*'s Behauptung lässt sich so verificiren. Setzt man:

$$F(w,w') = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} w + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} w' - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} w + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} w'\right),$$

so erhält man aus:

$$J = \int \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} ww + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} ww' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} w'w'\right) dx$$

dnrch factorenweise Integration:

$$\int w F(w, w')\, dx.$$

Da nun für jede beliebige Function u von x identisch:

$$wF(u,u') - uF(w,w') = \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}(uw' - wu')\right]$$

ist, so wird, wenn u der Differentialgleichung:

$$F(u, u') = 0$$

genügt,

$$J = \int \frac{w}{u} \cdot u F(w, w')\, dx = \int \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(w' - w\frac{u'}{u}\right)^2 dx,$$

woraus sich sofort die von *Jacobi* angegebene Beziehung zwischen u und v ergibt. Um anch die Richtigkeit der Gleichung:

$$u = \alpha \frac{\partial y}{\partial a} + \beta \frac{\partial y}{\partial b}$$

nachzuweisen, beachte man, dass y der Differential-Gleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

genügt, deren allgemeines Integral zwei willkürliche Constanten a nnd b enthält. Wird dieser Werth von y eingesetzt, so ist identisch:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0.$$

Entwickelt man nunmehr die rechte Seite, so stimmt sie Glied für Glied mit $F(u, u')$ überein, wenn nur $\frac{\partial y}{\partial a}$ überall durch u ersetzt wird. Mithin ist das allgemeine Integral der linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung $F(u,u')=0$ gerade

$$u = \alpha \frac{\partial y}{\partial a} + \beta \frac{\partial y}{\partial b},$$

was zu beweisen war.

In ähnlicher Art lassen sich auch die weiteren Sätze von *Jacobi* verificiren; näheres findet man in den oben angeführten Abhandlungen von *Delaunay* und *Hesse* und bei *Moigno-Lindelöf*, Calcul des variations, Paris 1861, Chap. VIII.

19) *Zu S. 94.* *Bertrand* hat in einer Note zu seiner Ausgabe der Mécaniqne analytique (t. II, S. 352. Paris 1853) gegen diese Behauptung *Jacobi*'s das Bedenken ausgesprochen, man dürfe nur schliessen, dass nach Überschreitung eines Grenzpunktes die Eigenschaft des Maximums oder Minimums aufhören könne, aber nicht, dass sie aufhören müsse. Dass dieses Bedenken unbegründet ist, hat für den besonderen Fall der geodätischen Linien *Bonnet* (Comptes rendus, t. 41, 1855), ganz allgemein *Weierstrass* in seinen Vorlesungen über Variationsrechnung nachgewiesen.

20) *Zu S. 95.* Nachdem schon *Lagrange* die Variation eines besonderen Doppelintegrals mit festen Grenzen betrachtet hatte, hat *Gauss* in seiner Abhandlung Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii, 1829 (Werke Bd. V, S. 29) die allgemeine Theorie der Variation von Doppelintegralen mit variabeln Grenzen begründet. *Poisson*'s Abhandlung befindet sich in den Mémoires de l'Académie Royale, t. XII, Paris 1833).

21) *Zu S. 98.* Eine genauere Ausführung dieser Andeutungen hat *Jacobi* in der sechsten seiner Vorlesungen über Dynamik gegeben (Ausgabe von Lottner, Berlin 1884, S. 46); vergl. auch Ges. Werke, Bd. VII, S. 72. Bewiesen wurden seine Sätze zuerst von *Bonnet* (Comptes rendus, t. 40 und 41, 1855) und dann von *Christoffel* (Abhandlungen der Kgl. Akademie zu Berlin für 1868). In neuerer Zeit sind auf diesen Gegenstand *v. Braunmühl* (Math. Ann., Bd. 14, 1879) und *v. Mangold* (Journal für Mathematik, Bd. 91, 1881) zurückgekommen.

Inhalt.

I. *Lagrange* (1736—1813) Seite

1) Versuch einer neuen Methode um die Maxima und Minima unbestimmter Integralformeln zu bestimmen (1762) 3

I. Problem I: $\int Z\,(x, y, z, \ldots, dx, dy, dz, \ldots)$ soll ein Maximum oder Minimum sein 4

II.—VI. Die Brachistochrone 7

VII. Vergleichung mit *Euler*'s Formeln 12

VIII. Die Bedingungsgleichungen sind nicht unabhängig von einander 13

IX.—X. Problem II: $\int Z$ soll ein Maximum oder Minimum sein, wenn Z noch unbestimmte Integrale in sich enthält 15

XI.—XV. Problem III: $\int Z$ soll ein Maximum oder Minimum sein, wenn Z durch eine Differentialgleichung gegeben wird 17

Anhang I: Das Problem der Minimalflächen 20

Anhang II: Das Polygon grössten Inhalts bei gegebenen Seiten 24

2) Über die Methode der Variationen (1770) 31

I. Vertheidigung gegen *Fontaine* und *Le-Seur* und *Jaquier* 31

II. Variation einer Function φ, welche durch irgend eine Differentialgleichung gegeben wird 34

III.—VII. Anwendungen auf die Variations-Rechnung 37

VIII. Neue Behandlung des Problems der Brachistochrone 50

II. *Legendre* (1752—1833)

Abhandlung über die Unterscheidung der Maxima und Minima in der Variations-Rechnung (1786) 57

I. Kriterium für $\int v\,(x, y, p)\,dx$ 58

II. Kriterium für $\int v\,(x, y, p, q)\,dx$ 60

III. Verallgemeinerung 62

Seite

IV. Andere Begründung des Kriteriums in I 63
V. Kriterium für $\int v\,(x, y, p, \varphi)\,dx$, wenn φ durch eine Differentialgleichung gegeben wird. 67
VI. Über den Körper des kleinsten Widerstandes . . 70
VII. Über die Kettenlinie. 74
VIII. Über den Kreis 76
IX. Über die Cycloide. 80

III. *Jacobi* (1804—1851)

Zur Theorie der Variations-Rechnung und der Differentialgleichungen (1837) 87

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig

517.5
577
QA
315
S77
v. 2

Leipzig [redacted] rch hervorragende Vertreter d[redacted] besorgt werden. Die Leitung der einzelnen Abtheilungen übernahmen: für Astronomie Prof. Dr. Bruns (Leipzig), für Mathematik Prof. Dr. Wangerin (Halle), für Krystallkunde Prof. Dr. Groth (München), für Pflanzenphysiologie Prof. Dr. W. Pfeffer (Leipzig), für Chemie Prof. Dr. W. Ostwald (Leipzig), für Physik Prof. Dr. Arthur von Oettingen (Leipzig).

Um die Anschaffung der Klassiker der exakten Wissenschaften Jedem zu ermöglichen und ihnen weiteste Verbreitung zu sichern, ist der Preis für den Druckbogen à 16 Seiten von jetzt an auf ℳ —.25 festgesetzt worden. Textliche Abbildungen und Tafeln jedoch machen eine entsprechende Preiserhöhung erforderlich.

Aus dem Gebiete der

Mathematik

sind bis jetzt erschienen:

Nr. 5. **C. F. Gauss**, Flächentheorie. (1827.) Deutsch herausg. v. A. Wangerin. (62 S.) ℳ —.80.

» 14. **C. F. Gauss**, Die 4 Beweise der Zerlegung ganzer algebr. F[illegible] nen etc. (1799—1849.) Herausg. v. E. Netto. Mit 1 Taf[illegible] ℳ 1.50.

» 17. **A. Bravais**, Abhandlungen über symmetr. Polyeder, [illegible] und in Gemeinschaft mit P. Groth herausg. von C[illegible] Mit 1 Taf. (50 S.) ℳ 1.—.

» 19. Üb. d. Anziehung homogener Ellipsoide. Abh[illegible] (1782), **Ivory** (1809), **Gauss** (1813), **Chas**[illegible] (1839). Herausg. von A. Wangerin. [illegible]

» 46. Abhandlungen über Variations-Rec[illegible] lungen von **Joh. Bernoulli** (169[illegible] **Leonhard Euler** (1744). Her[illegible] 19 Textfiguren. (144 S.) ℳ [illegible]

» 47. —— —— II. Theil: [illegible] 1770), **Legendre** (1786[illegible] P. Stäckel. Mit 1[illegible]

MAR 18 1992

[redacted]